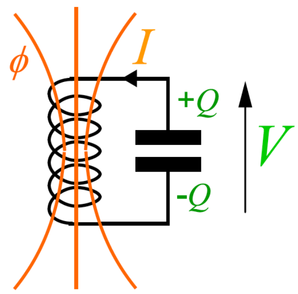

Classe Inversée III : Lagrangien d'un résonateur LC quantique

On s'intéresse au circuit électronique ci-dessus, qui contient une inductance L et une capacité C et **aucun** élément dissipatif. Dans une analogie classique, on peut voir le fluide des électrons comme un liquide incompressible et sans viscosité qui se réfléchirait sur les électrodes du condensateur. Ce circuit peut ainsi donner lieu à des oscillations, dites *plasma*. On rappelle les relations d'électrocinétique

$$V_{capa} = Q/C,$$

$$\dot{Q} = I,$$

$$V_{induct} = L\dot{I},$$

où V_{capa} et V_{induct} sont les tensions au bord de C et de L respectivement, Q la charge sur la capacité et I le courant dans le circuit. Dans le circuit ci-dessus on a bien sûr $V_{capa} = V_{induct} = V$. Le point signifie dans tout le sujet une dérivée totale par rapport au temps.

On définit aussi le paramètre

$$\varphi(t) = \frac{e}{\hbar} \int_0^t V_{induct}(t')dt',$$

où e est la charge élémentaire, ainsi que

$$q(t) = \frac{1}{e} \int_0^t I(t')dt'.$$

1.) Quelle est la dimension de φ et q ? Interprétez le sens physique de ces deux grandeurs.

2.) Le lagrangien du circuit est donné par la fonction sans dépendance explicite en t

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{C}{2}\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2L}\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2 \varphi^2$$

A partir de la relation d'Euler-Lagrange, établissez une équation différentielle sur φ. Rappelez la pulsation naturelle ω_p de ce circuit et déduisez-en une échelle d'énergie quantique naturelle du système.

3.) Exprimez le moment canonique conjugué de φ (que nous noterons p) en fonction de $\hbar$ et q.

Ecrivez l'expression de l'hamiltonien classique du système en fonction de φ et q.

4.) Donnez une interprétation physique des deux termes de cet hamiltonien. Montrez que le système est en tout point analogue à l'oscillateur harmonique étudié en cours.

5.) A partir du principe de correspondance classique-quantique de Dirac, donnez la relation de commutation entre les deux opérateurs quantiques, de *phase* $\hat{\varphi}$ et du *nombre de charges* $\hat{q}$. Discutez (sans démonstration) la relation d'incertitude de Heisenberg dans ce système.

6.) Soit $Z_0 = \sqrt{L/C}$ et $\kappa = e\sqrt{Z_0/\hbar}$. On pose $\hat{q'} = \kappa\hat{q}$ et $\hat{\varphi'} = \kappa^{-1}\hat{\varphi}$. Montrez que l'hamiltonien peut s'écrire

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_p}{2}(\hat{q'}^2 + \hat{\varphi'}^2)$$

7.) Par analogie avec le TD2, définissez l'opérateur a qui permet d'écrire

$$H = \hbar\omega_p\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$$

Quelle est l'action de l'opérateur a ?

8.) Proposez une réalisation expérimentale de ce système.

Solutions

1.) $[eVt/\hbar] = 1$, donc φ est sans dimensions.

De même, $[I]$ est un nombre de charges e par seconde, donc q est aussi sans dimensions.

2.) On injecte le lagrangien du système dans les équations de Lagrange pour trouver

$$\frac{d}{dt}C\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2\dot{\varphi} = C\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2\ddot{\varphi} = -\frac{1}{L}\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2\varphi.$$

Ceci n'est rien d'autre que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique LC sans pertes, $\ddot{\varphi} + {\omega_p}^2\varphi = 0$, avec $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$. L'échelle d'énergie naturelle du système est $\hbar\omega_p$.

3.) $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = C\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2\dot{\varphi} = C\frac{\hbar}{e}V_{induct} = C\frac{\hbar}{e}V_{capa} = \frac{\hbar}{e}\int dt' I(t') = \hbar q$

$\mathcal{H} = p\dot{\varphi} - \mathcal{L}$, ce qui donne après calcul

$$\mathcal{H} = \frac{e^2}{2C}q^2 + \frac{1}{2L}\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2\varphi^2.$$

4.) Les deux termes de l'énergie sont celle stockée dans le condensateur et l'inductance respectivement. Ce résultat est complètement analogue à l'énergie de l'oscillateur harmonique mécanique 1D, somme des carrés (avec préfacteur) de la position x et de son moment canoniquement conjugué $p_x = m\dot{x}$.

5.) On a vu que le crochet de Poisson entre une coordonnée généralisée x et son moment canoniquement conjugué p est $\{x, p\} = 1 = \{\varphi, \hbar q\}$. Le principe de correspondance dicte alors $[\hat{\varphi}, \hat{q}] = i\mathbb{I}$.

6.) Il suffit de faire les remplacements suggérés et de simplifier ....

7.) On définit $a = \frac{\hat{\varphi}' + iq'}{\sqrt{2}}$ et $a^\dagger = \frac{\hat{\varphi}' - iq'}{\sqrt{2}}$, ce qui donne le résultat demandé. L'action des opérateurs a et $a^\dagger$ est respectivement d'annihiler et des créer des excitations élémentaires (plasmons) dans le circuit quantique LC.

8.) Un circuit LC supraconducteur bien sûr ! Pour aller plus loin et considérer des effets anharmoniques, vous pouvez regarder le sujet d'examen 2011/2012, dont cette CI est tirée.