Classe Inversée I : Propriétés de l'Hamiltonien en mécanique classique

On définit l'Hamiltonien

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}.}$$

1 Conservation de $\mathcal{H}$

Dans un système conservatif, $\Sigma \mathbf{F} = -\nabla V$ et V est indépendant du temps. En utilisant les équations de Lagrange, montrez qu'alors

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0.$$

2 Equations de Hamilton-Jacobi

Les équations de Hamilton-Jacobi se déduisent des équations de Lagrange et permettent de définir $\mathcal{H}$ sans faire appel explicitement à $\mathcal{L}$. Ce dernier est cependant caché dans

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Démontrez

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i.}$$

3 Hamiltonien d'une particule avec masse dans un potentiel scalaire

On suppose que $\mathcal{L} = T - V$, où T est l'énergie cinétique, comme vu en cours. Montrez que dans ce cas

$$\mathcal{H} = T + V.$$

4 Discussion

Justifiez que $\mathcal{H}$ n'est rien d'autre que l'*énergie totale* du système.

Preuve 1

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{1}$$

où le premier terme de droite est nul car le potentiel et donc le Lagrangien ne dépendent pas explicitement du temps. Par ailleurs,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2}$$

La différence entre les deux équations ci-dessus donne alors

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right), \tag{3}$$

quantité qui est nulle de par les équations de Lagrange.

Remarque : Si V, et donc $\mathcal{L}$, dépendent explicitement du temps, il reste

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t},$$

ce qui signifie que la seule variation de l'énergie totale en t est dans la dépendance explicite de V en t.

Preuve 2 : Différentions la définition de $\mathcal{H}$

$$d\mathcal{H} = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - d\mathcal{L}.$$

Par ailleurs

$$d\mathcal{L} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.$$

Or d'après les équations de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i.$$

D'où

$$d\mathcal{H} = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.$$

On reconnait alors dans l'expression ci-dessus les deux termes $\dot{q}_i$ et $-\dot{p}_i$ qui s'identifient aux dérivées partielles de $\mathcal{H}$ par rapport à p_i et q_i respectivement.

Preuve 3 : On part de la définition de $\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - V$. On trouve immédiatement que

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i \, p_i - \mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + V.$$