Classe Inversée 0 : Equations de Lagrange

1 Principe de moindre action

Soient les $(q_i, \dot{q}_i)$ avec $i = 0, ..., N-1$ les coordonnées généralisées d'un système et $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ le lagrangien. On définit l'action d'une trajectoire reliant un point A dans l'espace des coordonnées généralisées à l'instant t_1 à un point B à l'instant t_1 par

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Le principe de moindre action stipule que le chemin effectivement suivi par le système est celui qui minimise l'action.

Supposons que $(q_i, \dot{q}_i)$ représente le chemin effectivement suivi par le système. Considérons une trajectoire très voisine $(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i)$ reliant les mêmes points A et B, avec les mêmes temps initial et final. Soit $\delta\mathcal{S}$ la différence entre les actions des deux trajectoires. Justifiez que $\delta\mathcal{S} = 0$ et déduisez-en les N équations

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right).$$

2 Equations de Lagrange

En utilisant le fait que $\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i$ et en intégrant par parties montrez que

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i.$$

Ceci étant vrai $\forall \delta q_i$ tant que celui-ci reste petit, on en déduit les N équations de Lagrange pour ce système

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0.}$$

3 Example: Lagrangien du double pendule

Soient deux masses m_1 et m_2 accrochées comme sur la figure 1 et libres d'osciller dans le plan xOy. Les deux bras de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 sont rigides et sans masse. Identifiez les coordonnées généralisées du système et écrivez le Lagrangien.

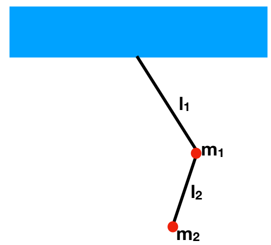

Figure 1: Schéma du double pendule.

Question 1

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(\mathcal{L}(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta q_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \delta\dot{q}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right). \tag{1}$$

Or $\delta\mathcal{S} = 0$ car $\mathcal{S}$ est extrêmale autour de la trajectoire effectivement suivie.

Question 2 : Intégrons par parties

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt}\delta q_i\right) = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\,\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

Le premier terme est nul car $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ (les points A et B sont les mêmes pour la vraie trajectoire et les déviations autour de celle-ci.

Question 3 : Soient θ_1 et θ_2 respectivement les angles que forment les deux bras articulés avec la verticale (orientée vers le bas). Ces deux angles ainsi que leurs dérivées temporelles forment un système indépendant et complet de variables pour décrire la dynamique du système. Ecrivons les énergies cinétiques T et potentielles V des deux masses.

Pour la première masse, on a $T_1 = m_1(\ell_1\dot{\theta}_1)^2/2$ et $V_1 = -m_1 g\ell_1\cos(\theta_1)$.

Pour la deuxième masse, $T_2 = m_2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2$, avec $x_2 = \ell_1\cos(\theta_1)+\ell_2\cos(\theta_2)$ et $x_2 = \ell_1\sin(\theta_1) + \ell_2\sin(\theta_2)$. On obtient après calcul

$$T_2 = (m_2/2)(\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2).$$

Puis $V_2 = -m_2 g(\ell_1\cos(\theta_1) + \ell_2\cos(\theta_2))$. Le lagrangien est enfin donné par $\mathcal{L} = T_1 + T_2 - V_1 - V_2$.