Classe Inversée IV : Lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

On pose le lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m\, \dot{\mathbf{r}}^2 - q\, V(\mathbf{r}, t) + q\, \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}$$

Démontrons que l'on retrouve bien l'équation de Newton d'une particule dans un champ électromagnétique

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\,\mathbf{E} + q\,\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B},$$

c'est-à-dire avec force de Lorentz.

1.) Ecrivez la projection sur x de la RFD ci-dessus en introduisant les potentiels scalaire V et vecteur $\mathbf{A}$.

2.) Appliquez l'équation de Lagrange selon x au lagrangien défini ci-dessus et retrouvez le résultat de la question précédente.

Solutions

Le terme dans la direction x issu du champ magnétique de la RFD s'écrit $\dot{y}B_z - \dot{z}B_y$, avec $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ et $B_y = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$. Par ailleurs $E_x = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$. On trouve donc

$$m\ddot{x} = -q\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + q\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right] \tag{1}$$

Ecrivons maintenant l'équation de Lagrange. Le premier terme donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m\,\dot{x} + qA_x\right) \\ &= m\,\ddot{x} + q\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

Le second terme donne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -q\frac{\partial V}{\partial x} + q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

L'identité entre ces deux termes conduit à l'équation (1), ce qui prouve donc que l'équation de Newton (le long de x, mais le calcul est analogue dans les deux autres directions) avec force de Lorentz découle du lagrangien énoncé au début.