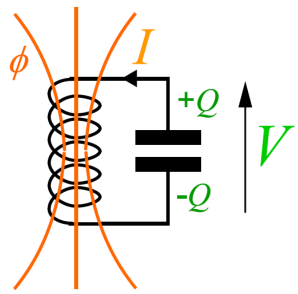

Examen de physique quantique, le 19/01/2012

PHELMA PNS 2A

Circuits quantiques

On s'intéresse au circuit électronique ci-dessus, qui contient une inductance L et une capacité C et **aucun** élément dissipatif. Dans une analogie classique, on peut voir le fluide des électrons comme un liquide incompressible et sans viscosité qui se réfléchirait sur les électrodes du condensateur. Ce circuit peut ainsi donner lieu à des oscillations, dites *plasma*. On rappelle les relations d'électrocinétique

$$V_{capa} = Q/C,$$
$$\dot{Q} = I,$$
$$V_{induct} = L\dot{I},$$

où V_{capa} et V_{induct} sont les tensions au bord de C et de L respectivement, Q la charge sur la capacité et I le courant dans le circuit. Dans le circuit ci-dessus on a bien sûr $V_{capa} = V_{induct} = V$. Le point signifie dans tout le sujet une dérivée totale par rapport au temps.

On définit aussi le paramètre

$$\varphi(t) = \frac{e}{\hbar}\int_0^t V_{induct}(t')dt',$$

où e est la charge élémentaire, ainsi que

$$q(t) = \frac{1}{e}\int_0^t I(t')dt'.$$

1.) Quelle est la dimension de φ et q ? Interprétez le sens physique de ces deux grandeurs.

2.) Le lagrangien du circuit est donné par la fonction sans dépendance explicite en t

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{C}{2}\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2L}\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2 \varphi^2$$

A partir de la relation d'Euler-Lagrange, établissez une équation différentielle sur φ. Rappelez la pulsation naturelle ω_p de ce circuit et déduisez-en une échelle d'énergie quantique naturelle du système.

3.) Exprimez le moment canonique conjugué de φ (que nous noterons p) en fonction de $\hbar$ et q.

Ecrivez l'expression de l'hamiltonien classique du système en fonction de φ et q.

4.) Donnez une interprétation physique des deux termes de cet hamiltonien. Montrez que le système est en tout point analogue à l'oscillateur harmonique étudié en cours.

5.) Lorsque l'on quantifie un jeu de variables dynamiques classiques décrivant un système donné (notés x_i) et leurs moments canoniquement conjugués p_i, les opérateurs associés à chacune de ces variables doivent vérifier les relations de commutation

$$[\hat{x_i}, \hat{p_j}] = i\hbar\delta_{ij}.$$

Déduisez-en la relation de commutation entre l'opérateur *phase* $\hat{\varphi}$ et l'opérateur *nombre de charges* $\hat{q}$. Discutez (sans démonstration) la relation d'incertitude de Heisenberg dans ce système.

6.) Soit $Z_0 = \sqrt{L/C}$ et $\kappa = e\sqrt{Z_0/\hbar}$. On pose $\hat{q'} = \kappa\hat{q}$ et $\hat{\varphi'} = \kappa^{-1}\hat{\varphi}$. Montrez que l'hamiltonien peut s'écrire

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_p}{2}(\hat{q'}^2 + \hat{\varphi'}^2)$$

Par analogie avec les résultats sur l'oscillateur harmonique vu en TD, et sans démonstration, définissez les opérateurs de création et d'annihilation $a^\dagger$ et a tel que

$$\hat{H} = \hbar\omega_p(a^\dagger a + 1/2).$$

Déduisez-en (sans démonstration) le spectre *plasma* du circuit LC quantique (c'est à dire, les énergies des états propres $\{| n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\hat{H}$).

7.) Quelle est la valeur moyenne de la charge électrique dans l'état fondamental ($\langle 0 \mid e\,\hat{q} \mid 0\rangle$) ? Quelle est l'amplitude des fluctuations quantiques autour de cette valeur moyenne ? Mêmes questions pour $\frac{\hbar}{e}\hat{\varphi}$.

8.) On remplace l'inductance L par un nouveau dipôle appelé JJ (jonction Josephson), d'hamiltonien $-E_J \cos \hat{\varphi}$, où E_J est une constante positive. Le hamiltonien du système est donc

$$\hat{H} = E_c \, \hat{q}^2 - E_J \cos \hat{\varphi},$$

où $E_c = e^2/2C$.

a.) Montrez que pour des petites valeurs de $\langle \hat{\varphi} \rangle$ le système est analogue à un circuit LC simple (à un terme constant sans importance près), avec une inductance L' que l'on précisera.

b.) Incluez maintenant dans $\hat{H}$ le développement limité de $\cos \hat{\varphi}$ à l'ordre 4 en $\hat{\varphi}$, qui sera traité comme une perturbation (notée $\hat{W}$) de l'hamiltonien de la question 8a).

c.) Estimez κ numériquement (pas besoin de calculatrice !) pour une impédance Z_0 de circuit de 50 Ω. Justifiez ainsi le traitement perturbatif du terme en $\hat{\varphi}^4$.

d.) On admet que $\hat{W}$ se met sous la forme

$$\hat{W} = -\frac{E_J}{96} \kappa^4 \left(a^2 a^{\dagger 2} + a^{\dagger 2} a^2 + (2\hat{N} + 1)^2 \right) + \hat{W}',$$

où $\hat{N} = a^\dagger a$ et $\hat{W}'$ est un opérateur avec des éléments de matrice diagonaux nuls dans la base des $\{| \, n\rangle\}$. Calculez la modification au premier ordre en $\hat{W}$ du spectre du circuit.

e.) (question calculatoire, je vous conseille de vous y attaquer seulement après avoir répondu à 9.)

A partir de 8b.), prouvez l'expression donnée ci-dessus de $\hat{W}$ en fonction de $a^\dagger$ et a.

9.) On considère deux circuits quantiques (LC d'une part, modifié comme en question 8. d'autre part), initialement dans leur état fondamental. Chaque circuit est irradié par une onde électromagnétique de pulsation résonante avec la transition entre les deux niveaux de plus basse énergie de chaque circuit. En quoi les deux circuits répondent-ils très différemment ?