Examen de physique quantique, le 21/01/2013

PHELMA PNS 2A

Notations :
$-e$ est la charge électrique de l'électron
$\hbar = 1$ dans tout le problème (il suffit de travailler dans le bon système d'unités...).
$\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$
$[A, B] = AB - BA$
I_0 est l'opérateur identité.
Les opérateurs notés en gras sont des vecteurs d'opérateurs.

Spin isotopique

1 Nucléons

Les deux particules fermioniques qui forment le noyau atomique sont le proton p et le neutron n. Ces deux particules sont quasiment identiques (masse, spin 1/2, ...) à la différence principale près que le proton a une charge électrique $+e$ alors que celle du neutron est nulle. Cependant, aux distances typiques de la taille du noyau les forces d'interaction forte dépassent largement les forces électromagnétiques, on peut donc négliger cette différence. On est alors tenté de considérer le noyau comme constitué de particules appelées nucléons qui auraient un degré de liberté interne: soit n (le fait d'être neutron) soit p (le fait d'être proton). Nous voici avec un système à deux niveaux, $|n\rangle$ et $|p\rangle$, qui rappelle beaucoup les deux états propres $\pm 1/2$ de l'opérateur S_z associé à un spin $S = 1/2$. Cette similitude formelle avec le spin (sans en être un) conduit à parler de *spin isotopique* ou *isospin*, de valeur $\mathcal{I} = 1/2$ comme pour le vrai spin 1/2.

On souhaite alors remonter à l'opérateur quantique $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ qui ait les propriétés de moment cinétique du spin 1/2 sur l'espace de Hilbert engendré par la base canonique ($|p\rangle$, $|n\rangle$). $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ est bien sûr un opérateur vectoriel, et donc

$$\boldsymbol{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_3 \end{pmatrix}.$$

(on préfère les indices 1,2,3 plutôt que x, y, z car la notion de direction d'espace perd de sa signification ici, mais c'est tout analogue.)

1.1 Ecrivez les relations de commutation que les $\mathcal{I}_i$, avec $i = 1, 2, 3$, doivent vérifier.

1.2 Par analogie toujours avec le spin on doit avoir

$$\mathcal{I}_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle,$$

$$\mathcal{I}_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle.$$

Définissez les deux opérateurs $\mathcal{I}_\pm$ pertinents et écrivez les matrices respectives dans la base canonique.

1.3 Si $|p\rangle$ représente l'état quantique d'un proton, que représente $\mathcal{I}_-|p\rangle$ physiquement ?

1.4 Ecrivez la matrice de $\boldsymbol{\mathcal{I}}^2$ dans la base canonique.

1.5 On définit l'opérateur $Q^N = \mathcal{I}_3 + \alpha I_0$, où N signifie nucléaire et α est un scalaire. Ecrire sa matrice dans la base canonique. Comment choisir α pour que Q^N puisse être interprété (à une constante multiplicative près) comme l'opérateur "charge de la particule" ?

1.6 Calculez les vecteurs propres normés et les valeurs propres de $\mathcal{I}_1$.

2 Mésons π

Les mésons π (appelés aussi "pions") sont des particules importantes en physique des hautes énergies. Tout comme il existe deux nucléons (proton et neutron), il existe trois mésons π (π^+, π^0, π^-), de charge électrique $+e, 0$ et $-e$ respectivement. Comme précédemment, ces trois particules sont (pour nos besoins) identiques, à leur charge électrique près. Nous sommes donc à nouveau tentés de considérer ces trois états de charge (contre deux dans la section précédente) comme un degré de liberté interne d'une unique particule, *le* méson π. La valeur de l'isospin est dans ce cas égale à 1.

On va donc définir un nouveau vecteur d'opérateurs

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{pmatrix},$$

opérateurs $\mathcal{J}_i$ qui agissent sur l'espace hilbertien de dimension 3 engendré par les trois états, $|\pi^+\rangle, |\pi^0\rangle, |\pi^-\rangle$ (qui est la base canonique).

$\boldsymbol{\mathcal{J}}$ aura bien sûr aussi les propriétés d'un moment cinétique et en particulier

$$\mathcal{J}_3|\pi^+\rangle = |\pi^+\rangle,$$

$$\mathcal{J}_3|\pi^0\rangle = 0,$$

$$\mathcal{J}_3|\pi^-\rangle = -|\pi^-\rangle.$$

2.1 Ecrivez la matrice de $\boldsymbol{\mathcal{J}}^2$ dans la base canonique.

2.2 Définissez les deux opérateurs $\mathcal{J}_\pm$ pertinents et écrivez leur matrices respectives dans la base canonique.

2.3 Comment définir l'opérateur "charge de la particule" Q^π ici, en analogie avec la question 1.5 ?

2.4 Ecrivez les vecteurs propres normés et valeurs propres de $\mathcal{J}_1$.

3 Isospin total

Supposons un état composite contenant un nucléon et un pion. Par exemple un système dont l'état quantique contient un neutron et un π^+ s'écrira $|n, \pi^+\rangle$ (base canonique).

On définit alors le vecteur d'opérateurs *isospin total* du système hybride (nucléon + pion) par

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{I}} + \boldsymbol{\mathcal{J}}$$

3.1 Quelles sont les principales propriétés de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ et quelle est la dimension de l'espace de Hilbert sur lequel agissent les $\mathcal{L}_i$?

3.2 Quelle est l'action de $\mathcal{I}^2$, $\mathcal{I}_3$, $\mathcal{J}^2$ et $\mathcal{J}_3$ respectivement sur $|n, \pi^+\rangle$?

3.3 $|n, \pi^+\rangle$ est-il état propre de $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2$? Justifier.

3.4 En analogie avec votre cours et à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan ci-joints, écrivez la base propre (notée $|\ell, m\rangle$) commune des quatre opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{I}}^2$, $\boldsymbol{\mathcal{J}}^2$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2$ et $\mathcal{L}_3 = \mathcal{I}_3 + \mathcal{J}_3$. On écrira les différents $|\ell, m\rangle$ dans la base canonique des états à un nucléon et à un pion.

3.5 On définit l'opérateur de charge électrique totale $Q^{tot} = Q^N + Q^\pi$. Exprimez Q^{tot} en fonction de $\mathcal{L}_3$. Quelles sont ses valeurs propres ?

4 Interaction forte

L'interaction dite *forte*, d'hamiltonien H_{int}, agit sur de très courtes distances entre certaines particules dont font partie les nucléons et les pions. L'intérêt du formalisme développé ci-dessus réside dans la propriété appelée *indépendance de charge* (ou conservation de l'isospin) de l'interaction forte :

$$[H_{int}, \boldsymbol{\mathcal{L}}] = \mathbf{0}. \tag{1}$$

4.1 Que valent $[H_{int}, \mathcal{L}_3]$, $[H_{int}, \boldsymbol{\mathcal{L}}^2]$ et $[H_{int}, \mathcal{L}_\pm]$? Que vaut $[H_{int}, Q^{tot}]$? Faites le lien entre l'éq. (1) et l'intitulé d'*indépendance de charge*.

4.2 Montrez que $H_{int}|\ell, m\rangle$ est vecteur propre de $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2$ et $\mathcal{L}_3$. En déduire que lorsqu'un système (nucléon + pion) est dans un état propre $|\ell, m\rangle$ de $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2$ et $\mathcal{L}_3$, alors l'hamiltonien d'interaction forte ne peut changer ni m ni ℓ.

4.3 Justifiez que l'on a

$$\langle \ell', m' | H_{int} | \ell, m\rangle = \delta_{\ell,\ell'}\, \delta_{m,m'}\, b_\ell,$$

où b_ℓ est un scalaire réel qui ne dépend que de ℓ. (Astuce : pour montrer que l'expression ci-dessus est indépendante de m vous pouvez démontrer p.ex. $\langle \ell, m|H_{int}|\ell, m\rangle = \langle \ell, m-1|H_{int}|\ell, m-1\rangle$. Pensez à utiliser $\mathcal{L}_{\pm}$.)

4.4 En vous inspirant d'un exemple vu en cours, proposez une forme possible en principe pour H_{int}, c'est à dire qui respecte l'éq. (1).

5 Diffusion nucléon-pion

On considère un proton au repos bombardé par un pion chargé incident avec une énergie cinétique bien définie.

Les réactions de diffusion suivantes sont possibles

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p \tag{2a}$$
$$\pi^- + p \to \pi^- + p \tag{2b}$$
$$\pi^- + p \to \pi^0 + n. \tag{2c}$$

La deux premières sont de simples diffusions, la troisième comporte un échange de charge électrique.

5.1 Ecrire chacun des trois états (nucléon + pion) qui interviennent dans les équations ci-dessus, soit à gauche soit à droite, dans la base des $|\ell, m\rangle$.

5.2 L'amplitude de probabilité de diffusion dans un angle solide, une direction et à une distance de la région d'interaction donnés, est proportionnelle à $\langle \psi_{final}|H_{int}|\psi_{initial}\rangle$. Calculez cette quantité pour chacune des trois réactions en fonction des deux paramètres $b_{1/2}$ et $b_{3/2}$.

5.3 Montrez que les sections efficaces des trois réactions valent respectivement (à une constante de proportionnalité commune près).

$$|b_{3/2}|^2 \ ; \ \frac{1}{9}|b_{3/2} + 2b_{1/2}|^2 \ ; \ \frac{2}{9}|b_{3/2} - b_{1/2}|^2.$$

5.4 Expérimentalement, on trouve qu'à une énergie relativement haute de 154 MeV, la réaction (2.a) est presque 9 fois plus probable que (2.b). Déduisez-en la hiérarchie entre $|b_{3/2}|$ et $|b_{1/2}|$ à cette énergie.

5.5 A plus basse énergie on a à une bonne approximation

$$H_{int} = \frac{f^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \, \boldsymbol{\mathcal{I}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}},$$

où f et $\mu > 0$ sont des constantes réelles et r est la distance nucléon – pion. Exprimez H_{int} en fonction de $\boldsymbol{\mathcal{L}}^2$, $\boldsymbol{\mathcal{J}}^2$ et $\boldsymbol{\mathcal{I}}^2$, puis calculez le rapport $\frac{b_{3/2}}{b_{1/2}}$.

Sujet d'après G. Baym, "Lectures on Quantum Mechanics" (chap. 16), Ed. Benjamin, 1969