Examen de physique quantique, le 22/01/2014

PHELMA PNS 2A

Etats propres de l'atome couplé au champ électromagnétique

Ce sujet approfondit le concept de couplage atome-rayonnement vu en cours. La partie I met en place diverses formulations équivalentes de la physique quantique. Ensuite nous allons établir l'hamiltonien général de l'interaction atome-rayonnement, dans le modèle dit de Jaynes-Cummings. Finalement nous allons chercher les états propres du système couplé, ce qui conduit à la notion d'*atome habillé*.

Les oscillations de Rabi entre ces états propres ont été observées expérimentalement par l'équipe de S. Haroche et J.M. Raimond (M. Brune et al., Phys. Rev. Lett. 76, 1800 (1996)).

Notations et conventions :

- I_0 est l'opérateur identité.
- e est la charge élémentaire.
- $[A, B] = AB - BA$ est le commutateur de A et B.
- On définit les matrices 2×2 suivantes
  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- On définit l'exponentielle d'un opérateur A

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Cette fonction d'opérateur a les principales propriétés de la fonction exponentielle. On a en particulier, si A et B commutent,

$$e^A\, e^B = e^{A+B}.$$

Par ailleurs, si A dépend du temps alors

$$\frac{d \exp(A(t))}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} \exp(A(t)).$$

Enfin, si $[A, B] = 0$ alors $\left[e^A, B\right] = 0$

- Un terme simplement proportionnel à I_0 (sans dépendance temporelle) dans un hamiltonien n'affecte pas la physique (choix de l'origine des énergies); deux hamiltoniens qui diffèrent seulement de λI_0 (λ constante) seront donc considérés comme identiques.
- On rappelle que deux opérateurs qui agissent sur des espaces de Hilbert différents commutent.

1 Points de vue de Schrödinger, de Heisenberg et de Dirac

Soit $|\varphi(t)\rangle$ le vecteur d'état quantique (normé) d'une particule, sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ régi par un hamiltonien total H indépendant du temps.

On suppose qu'il existe un opérateur $U(t,t_0)$ de $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tel que pour tout couple t, t_0

$$|\varphi(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\varphi(t_0)\rangle. \tag{1}$$

Cet opérateur est appelé l'opérateur d'évolution : sa connaissance permet de déterminer simplement $|\varphi(t)\rangle$ à tout instant, connaissant sa valeur à l'instant initial t_0.

1.1 Différentiez l'équation (1) par rapport à t et, à l'aide de l'équation de Schrödinger

$$H|\varphi(t)\rangle = i\hbar \frac{d|\varphi(t)\rangle}{dt},$$

montrez que

$$i\hbar \frac{dU(t,t_0)}{dt} = H\,U(t,t_0).$$

1.2 Cette équation différentielle sur l'opérateur U peut s'intégrer comme si U était une fonction scalaire. Déduisez-en que (cf. définition de l'exponentielle d'opérateur en introduction)

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i(t-t_0)H}{\hbar}\right).$$

On notera que ceci n'est pas en général vrai si H dépend du temps.

1.3 Soit $\langle A\rangle(t)$ la moyenne quantique de l'observable A (opérateur sans dépendance explicite du temps) à l'instant t, moyennée sur l'état quantique $|\varphi(t)\rangle$.

Montrez que

$$\langle A\rangle(t) = \langle\varphi(t_0)|\,A_H(t)\,|\varphi(t_0)\rangle. \tag{2}$$

où

$$A_H(t) = \exp\left(\frac{i(t-t_0)H}{\hbar}\right) A \ \exp\left(-\frac{i(t-t_0)H}{\hbar}\right).$$

On peut ainsi - plutôt que de postuler que les fonctions d'onde dépendent du temps et que les opérateurs sont constants - considérer que les opérateurs dépendent du temps via la transformation ci-dessus et que la fonction d'onde est constante. Ceci s'appelle le **point de vue de Heisenberg**, par opposition à celui vu en cours appelé **point de vue de Schrödinger**.

Il existe un troisième point de vue, celui dit de **Dirac ou de l'interaction**, souvent utile lorsque H se décompose en une partie principale constante et connue H_0 et un terme d'interaction $W(t)$ qui peut dépendre du temps : $H = H_0 + W(t)$. On définit alors pour tout vecteur d'état $|\varphi(t)\rangle$ et pour tout opérateur $A(t)$ (pouvant éventuellement dépendre explicitement du temps)

$$|\tilde{\varphi}(t)\rangle = e^{itH_0/\hbar}|\varphi(t)\rangle,$$
$$A_D(t) = \exp\left(\frac{itH_0}{\hbar}\right) A(t) \ \exp\left(-\frac{itH_0}{\hbar}\right)$$

où on a choisi $t_0 = 0$ pour alléger les notations. On notera que $A_D(0) = A(0)$.

1.4 En vous inspirant des questions précédentes, démontrez l'équation dite de Schwinger-Tomonaga

$$i\hbar\frac{d|\tilde{\varphi}\rangle}{dt} = W_D|\tilde{\varphi}\rangle,$$

qui est l'équivalent de l'équation de Schrödinger dans le point de vue de Dirac.

1.5 Pour un opérateur A indépendant du temps (dans le point de vue de Schrödinger), démontrez l'équation d'évolution temporelle

$$i\hbar\frac{dA_D(t)}{dt} = \left[A_D(t), H_0\right].$$

1.6 Supposons $H_0 = \alpha\hbar\sigma_z$, où α est une constante réelle et les matrices σ sont définies dans l'introduction. Calculez $[\sigma_+, \sigma_z]$. Que vaut $\sigma_{+,D}(0)$? A l'aide de l'équation dévolution ci-dessus, montrez que

$$\sigma_{+,D}(t) = e^{2i\alpha t}\sigma_+.$$

On admettra de même $\sigma_{-,D}(t) = e^{-2i\alpha t}\sigma_-$ sans démonstration.

1.7 Soient a et $a^\dagger$ des opérateurs d'annihilation/création associés à un hamiltonien $H_0 = \beta\hbar\, a^\dagger a$, où β est une constante réelle. On rappelle que $\left[a, a^\dagger\right] = I_0$. Montrez que

$$a_D^\dagger(t) = e^{i\beta t}a^\dagger.$$

On admettra de même $a_D(t) = e^{-i\beta t}a$ sans démonstration.

2 Hamiltonien de Jaynes-Cummings

Nous allons étudier l'interaction d'un atome avec un mode du champ électromagnétique, de pulsation ω, à l'intérieur d'une cavité. L'atome possède deux niveaux d'énergie, notés $|g\rangle$ et $|e\rangle$ (pour ground et exited), tel que $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$ soit $\approx \omega$, alors que toutes autres différences d'énergie entre deux niveaux sont très différentes de $\pm\hbar\omega$. On négligera donc dans toute la suite l'existence des niveaux atomiques autres que $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Nous supposerons que les fonctions d'onde orbitales des états propres de l'hamiltonien atomique H_{at} sont symétriques ou antisymétriques : $\psi_{g,e}(-\vec{r}) = \pm\psi_{g,e}(\vec{r})$.

2.1 Dans l'espace généré par $|g\rangle$ et $|e\rangle$, écrivez σ_z, σ_+ et σ_- en fonction de $|g\rangle\langle g|$, $|g\rangle\langle e|$, $|e\rangle\langle g|$ et $|e\rangle\langle e|$.

2.2 Ecrire la matrice de H_{at} dans la base ($|g\rangle$, $|e\rangle$). Montrer qu'on peut écrire

$$H_{at} = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \lambda I_0$$

avec λ une constante (en fait, la moyenne de E_g et E_e). L'origine des énergies n'ayant pas d'importance, on n'écrira plus ce terme constant dans la suite.

Le champ électrique, et en particulier son mode de pulsation ω, est un opérateur quantique. On admet qu'il peut s'écrire

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{u}_z\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0\nu}}\left(a + a^\dagger\right)\,\sin ky,$$

où $a^\dagger$ et a sont les opérateurs de création/annihilation d'un photon de pulsation ω respectivement, ϵ_0 la constante diélectrique du vide, ν le volume de la cavité et k le module du vecteur d'onde. La position y sera traitée comme un paramètre classique dans toute la suite. En cours nous avons vu que l'hamiltonien de ce mode du champ électro-magnétique peut s'écrire sous la forme

$$H_{em} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{I_0}{2}\right)$$

et on notera $|n\rangle$ le vecteur propre de H_{em} associé à la présence de n photons. L'origine des énergies n'ayant pas d'importance, on n'écrira plus le terme en $\hbar\omega I_0/2$ dans la suite.

On considère à présent le couplage de l'atome au champ électromagnétique

$$W = -\vec{D}\cdot\vec{\mathcal{E}},$$

où $\vec{D}$ est l'opérateur quantique du moment dipolaire de l'atome, défini par

$$\vec{D} = -e\vec{R},$$

où $\vec{R}$ est l'opérateur position.

2.3 Justifiez que

$$\langle g|\vec{D}|g\rangle = \langle e|\vec{D}|e\rangle = \vec{0}.$$

(Ne pas oublier que ces produits scalaires sont des intégrales de produits de fonctions d'onde)

2.4 Soit alors $d = \langle e| \left(\vec{D} \cdot \vec{u}_z\right) |g\rangle$ (on pourra supposer d réel sans perte de généralité). Justifiez que $\vec{D} \cdot \vec{u}_z = d\,(\sigma_+ + \sigma_-)$ et concluez que

$$W = \frac{\hbar\,\kappa(y)}{2}\,(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger), \tag{3}$$

où $\kappa(y)$ est une fonction réelle que l'on déterminera.

2.5 W est ainsi la somme de quatre produits d'opérateurs. Le système atome + champ est donc décrit par l'hamiltonien $H = H_0 + W$ où

$$H_0 = H_{at} + H_{em} = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a.$$

En utilisant les résultats des questions 1.6 et 1.7, écrivez chacun des quatre opérateurs de l'équation 3 dans le point de vue de Dirac - p. ex. $\sigma_{+,D}(t)\,a_D^\dagger(t)$ - et factorisez leur dépendance en t.

2.6 Le modèle de Jaynes-Cummings consiste à négliger les opérateurs avec une variation temporelle très rapide dans le point de vue de Dirac. On rappelle que le désaccord des pulsations $\delta = \omega_0 - \omega$ est tel que $|\delta| \ll \omega_0, \omega$. Déduisez-en que l'expression finale de l'hamiltonien (dit de Jaynes-Cummings, H_{JC}) de l'atome à deux niveaux couplé à un mode du champ électromagnétique s'exprime par

$$H_{JC} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\,\kappa(y)}{2}\,(\sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a).$$

3 Etats propres : l'atome *habillé*

Dans l'expérience considérée (figure 1), l'atome est injecté dans la cavité selon une trajectoire $\perp \vec{u}_y$, avec $\sin ky = 1$ (et donc $\kappa(y)$ dorénavant noté κ).

L'atome et le rayonnement étant dans des états quantiques couplés, on note p. ex. $|e, n\rangle$ l'état où l'atome est dans l'état $|e\rangle$ et le champ dans l'état $|n\rangle$.

3.1 Ecrire l'action de H_{JC} sur les vecteurs $|e, n\rangle$ et $|g, n+1\rangle$.

3.2 Justifiez que H_{JC} peut être décomposé selon $H_{JC} = \sum_n H_n$, où chaque H_n agit uniquement dans la base $(|e, n\rangle, |g, n+1\rangle)$ pour un n donné.

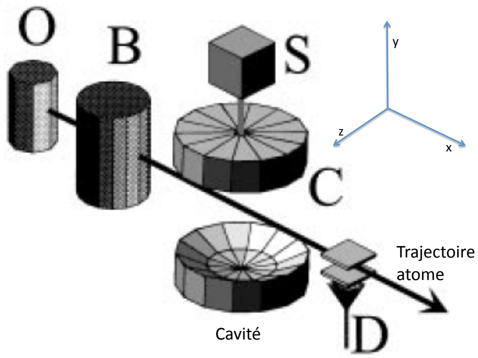

Figure 1: Schéma de l'expérience de Brune et al. : La source O (oven) émet des atomes de rubidium qui sont préparés dans l'état $|e\rangle$ dans B (box). Il traversent alors la cavité C (2 miroirs supraconducteurs). Une source S ultra-stable contrôle le champ, de 0 à n photons, dans C. L'état de l'atome après la traversée de C est mesuré dans le détecteur D.

3.3 Montrez que dans la base $(|e,n\rangle, |g,n+1\rangle)$, H_n s'écrit sous forme matricielle

$$H_n = E_n^0 I_0 + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \delta & \kappa\sqrt{n+1} \\ \kappa\sqrt{n+1} & -\delta \end{pmatrix},$$

où E_n^0 est un réel qui ne dépend que de n et ω.

3.4 Trouver les valeurs propres de H_n. On introduira la pulsation de Rabi $\Omega_n = \sqrt{\delta^2 + \kappa^2(n+1)}$.

3.5 On définit l'angle d'interaction $0 < \theta_n < \pi/2$ par

$$\sin(\theta_n) = \frac{\kappa\sqrt{n+1}}{\sqrt{(\Omega_n - \delta)^2 + \kappa^2(n+1)}}.$$

Montrer que les deux vecteurs définis par

$$|\chi_n^-\rangle = \cos\theta_n |e,n\rangle - \sin\theta_n |g,n+1\rangle$$

et

$$|\chi_n^+\rangle = \sin\theta_n |e,n\rangle + \cos\theta_n |g,n+1\rangle$$

forment une base orthonormée de diagonalisation de H_n.

3.6 Cas résonant. On suppose dans cette question $\delta = 0$ ($\omega_0 = \omega$). Ecrire vecteurs et valeurs propres de H_n dans ce cas.

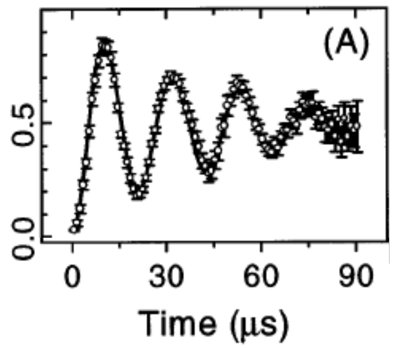

Figure 2: Probabilité expérimentale de la mesure de l'atome dans l'état $|g\rangle$ en fonction du temps d'interaction dans la cavité ($\delta = 0$, $n = 0$).

3.7 Cas non-résonant. On suppose maintenant $|\delta| \gg \kappa\sqrt{n+1}$. Donner explicitement les valeurs approchées des vecteurs et valeurs propres de H_n, selon si le désaccord est bleu ($\delta < 0$) ou rouge ($\delta > 0$).

3.8 Anti-croisement. Résumez les résultats des deux questions précédentes avec un tracé des énergies propres en fonction de δ. Indiquez les vecteurs propres près et loin de $\delta = 0$. Commentez.

3.9 **Oscillations de Rabi du vide**. On se place à résonance, $\delta = 0$. Supposons que l'atome entre dans la cavité à l'instant $t = 0$, dans l'état excité $|e\rangle$, et que la cavité est vide ($n = 0$). Montrez que la probabilité de trouver l'atome dans l'état excité à un instant ultérieur $t > 0$ est

$$\mathcal{P} = \cos^2 \frac{\Omega_0 t}{2}.$$

3.10 Commentez la mesure de Brune et al. (figure 2).

3.11 Même question que 3.9, mais pour $|\delta| \gg \kappa$: montrez que les oscillations de Rabi sont fortement réduites et que $\mathcal{P}$ reste toujours très proche de 1.