Examen de physique quantique, le 28/01/2015

PHELMA PNS 2A

Q-bit de spin 1/2

On définit

- $\mathbf{u}_{x,y,z}$ les vecteurs unitaires d'un référentiel orthonormé direct de l'espace réel, dont "$\cdot$" et "$\times$" sont les produits scalaire et vectoriel respectivement
- le vecteur d'opérateurs $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$, où

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- la base canonique $\{|\pm\rangle\}$ formée par les vecteurs propres de σ_z, de valeurs propres respectives ± 1.
- $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$. Attention, définition légèrement différente du cours.
- l'opérateur de spin, $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$
- l'opérateur identité I.

Rappels de trigonométrie

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) \pm \cos(\beta)\sin(\alpha),$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\sin\alpha = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\alpha^{2n+1}$$

$$\cos\alpha = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\alpha^{2n}$$

Si A est un opérateur, la notation e^A signifie

$$e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\,A^n.$$

Si A est inversible alors l'inverse de e^A est e^{-A}.

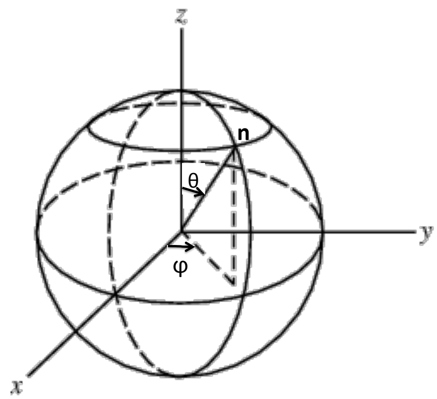

Figure 1: Sphère de Bloch

Pour les questions qui requièrent un commentaire ou une interprétation de votre part, celui-ci contera autant dans la note que le résultat mathématique. Les schémas sont les bienvenus quand cela est possible. Ecrivez lisiblement svp !

0.1

(1 point /20) Quel que soit l'état d'achèvement de votre copie, je vous demande - dans les 5 à 10 dernières minutes de l'examen - de synthétiser en un paragraphe l'ensemble de ce sujet : système, idées, analogie classique ou avec d'autres systèmes, outils, résultats, ... Vous pouvez bien sûr y inclure les questions auxquelles vous n'aurez pas pu (ou eu le temps de) répondre mais dont vous avez compris le sens.

1 Rotation d'un spin 1/2

1.1

Soit $|\psi\rangle$ un vecteur d'état quelconque de l'espace de Hilbert engendré par $\{|\pm\rangle\}$. Montrez qu'on peut écrire en toute généralité

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2}|-\rangle,$$

où $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

1.2

Il s'ensuit qu'on peut paramétrer de manière univoque $|\psi\rangle$ par un vecteur réel tridimensionnel $\mathbf{n}$, de norme 1 et de coordonnées longitudinales et azimutales θ et φ respectivement,

$$\mathbf{n} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{u}_y + \cos\theta\,\mathbf{u}_z.$$

Montrez que la moyenne quantique du spin dans l'état $|\psi\rangle$ est $\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{\hbar}{2}\mathbf{n}$. Interprétez ce résultat. On appelle $\mathbf{n}$ le vecteur de Bloch de l'état $|\psi\rangle$. Que peut-on dire d'un état dont le vecteur de Bloch est dans le plan Oxy ?

1.3

Que vaut σ_i^2 avec $i = x, y, z$? Soit $\mathbf{p}$ un vecteur unitaire quelconque de l'espace réel. Démontrez l'égalité suivante

$$\exp\left(-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right) = I\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{1}$$

On pourra utiliser pour cela que

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

On admettra que l'opérateur ci-dessus est l'opérateur de rotation du spin d'un angle θ autour de l'axe $\mathbf{p}$.

2 Dynamique d'un spin 1/2 dans un champ magnétique oscillant

2.1

L'opérateur moment magnétique quantique est donné par

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma\,\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\gamma\boldsymbol{\sigma},$$

où γ est une constante. On applique un champ uniforme et constant $\mathbf{B}_0 = B_0\,\mathbf{u}_z$. Montrez que l'énergie du moment magnétique dans ce champ conduit à un hamiltonien

$$H_0 = -\frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z,$$

où on définira ω_0.

2.2

On ajoute au champ constant un champ tournant dans le sens horaire (anti-trigonométrique) à la pulsation ω

$$\mathbf{B}_1 = B_1(\cos(\omega t)\mathbf{u}_x - \sin(\omega t)\mathbf{u}_y).$$

Donnez la contribution à l'hamiltonien du système, notée $H_1(t)$, associée à ce champ. On introduira la pulsation $\omega_1 = \gamma B_1$. Montrez que

$$H_1(t) = -\frac{\hbar}{2}\,\omega_1\left[\sigma_+ e^{i\omega t} + \sigma_- e^{-i\omega t}\right].$$

2.3

Ecrire l'hamiltonien total $H(t) = H_0 + H_1(t)$ sous forme matricielle dans la base canonique.

2.4

Considérez $H_1(t)$ comme une perturbation de H_0 et décrivez qualitativement sous quelles conditions on va obtenir une dynamique intéressante dans le système. Expliquez pourquoi on peut faire mieux qu'une approximation de perturbation dépendante du temps ici.

2.5

Nous allons nous ramener à un hamiltonien indépendant du temps par un changement de référentiel. On va se placer dans le référentiel tournant du champ $\mathbf{B}_1$. Grâce aux questions précédentes exprimez l'opérateur de rotation du spin d'un angle α autour de l'axe Oz. De quel angle $\alpha(t)$ a tourné le champ $\mathbf{B}_1$ dans le référentiel du laboratoire au bout d'un intervalle t (attention au signe) ?

2.6

Donnez les deux vecteurs notés $\{|\tilde{\pm}(t)\rangle\}$ de la base du référentiel tournant, en fonction des $\{|\pm\rangle\}$

2.7

On est ainsi amenés à définir le vecteur d'état dans le référentiel tournant

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-i\omega t\sigma_z/2}|\psi(t)\rangle.$$

Montrez que l'équation d'évolution de $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ est

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + e^{-i\omega t\sigma_z/2}H(t)e^{i\omega t\sigma_z/2}\right)|\tilde{\psi}(t)\rangle.$$

2.8

Le terme entre parenthèses ci-dessus est bien sûr l'hamiltonien dans le référentiel tournant, $\tilde{H}$. Soit $\tilde{\sigma}_{\pm}(t) = e^{-i\omega t\sigma_z/2}\sigma_{\pm}e^{i\omega t\sigma_z/2}$. Que vaut $\tilde{\sigma}_{\pm}(0)$? En utilisant les relations de commutation de $\sigma_{\pm}$ avec σ_z, calculez $\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{\pm}(t)$. En déduire une expression simple de $\tilde{\sigma}_{\pm}(t)$.

2.9

Montrez que

$$\tilde{H} = \frac{\hbar}{2}\left(\delta\, \sigma_z - \omega_1\, \sigma_x\right).$$

avec $\delta = \omega - \omega_0$; l'hamiltonien dans le référentiel tournant est donc indépendant du temps.

2.10

On pose $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2}$. Ecrivez l'expression de $\tilde{H}$ comme le produit scalaire d'un moment magnétique et d'un champ magnétique fictif, constant dans le référentiel tournant et le long d'un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ que l'on précisera.

3 Oscillations de Rabi et manipulation cohérente d'un Q-bit de spin 1/2

3.1

On considère un opérateur $\tilde{U}(t)$ agissant sur l'espace des états tel qu'à tout instant t

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{U}(t)\,|\tilde{\psi}(t=0)\rangle. \tag{2}$$

Cet opérateur est appelé l'opérateur d'évolution : sa connaissance permet de déterminer simplement $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ à tout instant, connaissant sa valeur à l'instant initial $t = 0$. Différentiez l'équation (2) par rapport à t et, à l'aide de l'équation de Schrödinger montrez que

$$i\hbar\frac{d\tilde{U}(t)}{dt} = \tilde{H}\,\tilde{U}(t).$$

3.2

Cette équation différentielle sur l'opérateur $\tilde{U}$ peut s'intégrer comme si $\tilde{U}$ était une fonction scalaire. Déduisez-en que

$$\tilde{U}(t) = \exp\left(-\frac{it\tilde{H}}{\hbar}\right).$$

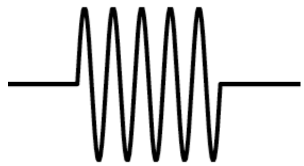

Figure 2: Train d'ondes

3.3

Grâce à l'équation (1) et la question 2.10, réécrivez $\tilde{U}(t)$ sans exponentielle.

3.4

On suppose que le champ tournant est résonant, c'est à dire que δ est nul. On suppose le spin initialement dans l'état $|\tilde{\psi}(t=0)\rangle = |+\rangle$ et le champ tournant appliqué à partir de $t = 0$. Calculez $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ et déduisez en la probabilité $P_-(t)$ de trouver les spin dans l'état $|-\rangle$ à l'instant t.

3.5

Dans la situation ci-dessus, un expérimentateur souhaite préparer l'état $|-\rangle$, sachant que le système est initialement dans l'état fondamental $|+\rangle$. Il applique un champ tournant sous la forme d'un train d'ondes dont la projection sur $\mathbf{u}_x$ est schématisée ci-dessus. Donnez les paramètres expérimentaux (durée, amplitude, fréquence) du train d'ondes.

3.6

On suppose maintenant que $\delta \neq 0$. Mêmes questions qu'en 3.4. Commentez.