1

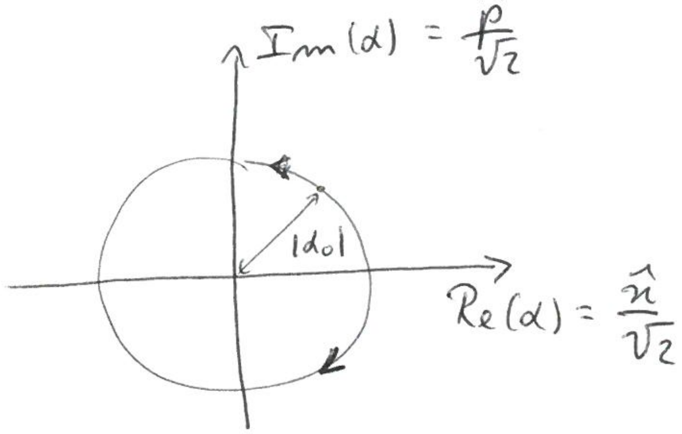
1.1. $p = m\dot{x}$ $\qquad$ $\dot{\hat{x}} = \beta\dot{x} = \frac{\beta}{m}p = \underbrace{\frac{\hbar\beta^2}{m}}_{=\omega}\hat{p}$

$\dot{p} = \sum F = -kx \quad \dot{\hat{p}} = \frac{1}{\hbar\beta}\dot{p} = \underbrace{\frac{-k}{\hbar\beta}\frac{1}{\beta}}_{=-\omega}\hat{x}$

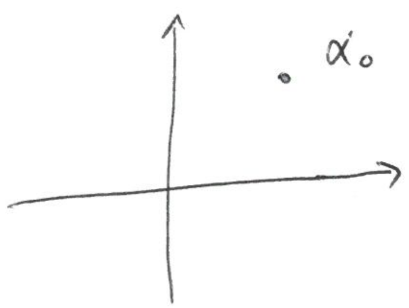
1.2. $\alpha(t) = \left(\hat{x}(t) + i\hat{p}(t)\right)/\sqrt{2}$

$\dot{\alpha}(t) = \left(\dot{\hat{x}} + i\dot{\hat{p}}\right)/\sqrt{2} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\left(\hat{p} - i\hat{x}\right) = \underline{-i\omega}\,\alpha(t)$

$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$



Dans référentiel tournant



1.3.)

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha(t) + \alpha^*(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}\right)$$

$$\hat{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\alpha - \alpha^*\right) = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t}\right)$$

1.4.

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \hbar\omega\left(\underbrace{\frac{1}{2m}\frac{(\hbar\beta)^2}{\hbar\omega}}_{\frac{1}{2m}\frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{\omega}}\cdot\frac{\cancel{m\omega}}{\cancel{\hbar}}}\hat{p}^2 + \underbrace{\frac{m\omega^2}{2\hbar\omega}\cdot\frac{1}{\beta^2}}_{\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{x}^2\right)$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\hat{x}^2}{2}\right) = \hbar\omega\,|\alpha(t)|^2 = \hbar\omega|\alpha_0|^2$$

Limite classique : $E \gg \hbar\omega$

$\iff |\alpha_0|^2 \gg 1$

2.1. Ce sont les mêmes si $\alpha \leftrightarrow a$

$\alpha^* \leftrightarrow a^+$

2.2. $$\frac{d}{dt}\langle a\rangle(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle [a,H]\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega}{i\hbar}\langle [a, a^+a]\rangle = \frac{\hbar\omega}{i\hbar}\langle (aa^+a - a^+aa)\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega}{i\hbar}\langle \underbrace{[a,a^+]}_{I} a\rangle = \frac{\hbar\omega}{i\hbar}\langle a\rangle(t)$$

$$= -i\omega\langle a\rangle(t)$$

d'où $\langle a\rangle(t) = \langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t}$

2.3. $$\langle a\rangle^* = \langle a^+\rangle = \langle a^+\rangle(0)\cdot e^{+i\omega t}$$

$$\langle a\rangle(0) = \alpha_0$$

$$\langle \hat{X}\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle a\rangle(t) + \langle a^+\rangle(t)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t} + \langle a\rangle^*(0)\, e^{i\omega t}\right)$$

$$\langle \hat{P}\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\langle a\rangle(t) - \langle a^+\rangle(t)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t} - \langle a\rangle^*(0)\, e^{i\omega t}\right)$$

identiques à 1.3 ssi $\alpha_0 = \langle a\rangle(0)$

2.4. $\langle H \rangle = \hbar\omega \langle a^+ a \rangle$ $\quad$ ($\frac{1}{2}$ négligé)

$= \hbar\omega \langle a^+ a \rangle (0)$ $\quad$ car énergie constante

$= \hbar\omega |\alpha_0|^2$ $\quad$ énergie classique

2.5. $\langle b^+ b \rangle_0 = \langle (a^+ - \alpha_0^*)(a - \alpha_0) \rangle (0)$

$= \langle a^+ a \rangle (0) - \alpha_0^* \langle a \rangle (0) - \alpha_0 \langle a^+ \rangle (0) + |\alpha_0|^2$

$= |\alpha_0|^2 - \alpha_0^* \alpha_0 - \alpha_0 \alpha_0^* + |\alpha_0|^2 = 0$

Donc $\langle \psi(0) | b^+ b | \psi(0) \rangle = 0 = \| b | \psi(0) \rangle \|^2$

$\iff b|\psi(0)\rangle = 0$

$\iff a|\psi(0)\rangle = \alpha_0 |\psi(0)\rangle$

L'état $|\psi(0)\rangle$ qui vérifie les conditions ci-dessus est donc un vecteur propre de a, de valeur propre α_0. On le note $|\alpha\rangle$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

2.6.

$$a|\alpha\rangle = \sum_n c_n a|\varphi_n\rangle = \sum_n c_n \sqrt{n} |\varphi_{n-1}\rangle$$

$$= \alpha|\alpha\rangle = \sum_n c_n \alpha \, |\varphi_n\rangle$$

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha c_n$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n c_0$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = \sum_n |c_n|^2 = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |c_0|^2$$

$$= |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}$$

D'où $\quad |c_0| = e^{-|\alpha|^2/2}$

2.7 Soit $\quad |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\varphi_n\rangle$

avec $\quad c_n(0) = e^{-|\alpha_0|^2/2} \dfrac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}$

Alors $\quad |\dot\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar} \sum_n c_n(t) \cdot E_n |\varphi_n\rangle$

$$= \sum_n \dot c_n(t) |\varphi_n\rangle$$

d'où $\quad c_n(t) = c_n(0)\, e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}$

et $\quad |\psi(t)\rangle = e^{-|\alpha_0|^2/2} e^{-i\omega t/2} \sum_n \dfrac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} |\varphi_n\rangle$

2.8 $|\alpha\rangle$ n'est pas un état propre de H.

- $P_n = |\langle\varphi_n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2/2} \dfrac{|\alpha|^{2n}}{n!}$

- $\langle H\rangle = \langle\alpha| \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) |\alpha\rangle$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \alpha^*\alpha\right)$$

- $$\langle H^2 \rangle = \langle \alpha | (\hbar\omega)^2 (a^\dagger a + \tfrac{1}{2})(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}) | \alpha \rangle$$
$$= (\hbar\omega)^2 \left[\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha^* \alpha + \langle \alpha | a^\dagger a a^\dagger a | \alpha \rangle \right]$$

$[a, a^\dagger] = 1$

$$\langle \alpha | a^\dagger (+a^\dagger a + 1) a | \alpha \rangle$$
$$= + (\alpha^*)^2 \alpha^2 + \alpha^* \alpha$$

$$\langle H^2 \rangle = (\hbar\omega)^2 \left[\frac{1}{4} + 2 |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right]$$

$$\Delta H = \hbar\omega \sqrt{\frac{1}{4} + 2|\alpha|^2 + |\alpha|^4 - \left(\frac{1}{2} + |\alpha|^2\right)^2}$$
$$= \hbar\omega |\alpha|$$

$$\frac{\Delta H}{\langle H \rangle} \simeq \frac{1}{|\alpha|} \rightarrow 0$$

2.9 $\langle X \rangle = \langle \alpha | \frac{a+a^\dagger}{\beta\sqrt{2}} | \alpha \rangle$ ← On fait agir $a^\dagger$ sur le bra $\langle \alpha |$

$$= \frac{1}{\beta\sqrt{2}} (\alpha + \alpha^*) = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \mathrm{Re}(\alpha)$$

$$\langle P \rangle = \langle \alpha | \frac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}} | \alpha \rangle \cdot \hbar\beta$$

$$= \frac{\hbar\beta}{i\sqrt{2}} (\alpha - \alpha^*) = \sqrt{2}\,\hbar\beta\, \mathrm{Im}(\alpha)$$

$$\langle X^2 \rangle = \frac{1}{2\beta^2} \langle \alpha | (a+a^\dagger)^2 | \alpha \rangle$$

$$= \frac{1}{2\beta^2} \langle \alpha | a^2 + (a^\dagger)^2 + aa^\dagger + a^\dagger a | \alpha \rangle$$

$$= \frac{1}{2\beta^2} \left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + \underbrace{\langle [a, a^\dagger] \rangle}_{=1} \right)$$

$$= \frac{1}{2\beta^2} \left((\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \right)$$

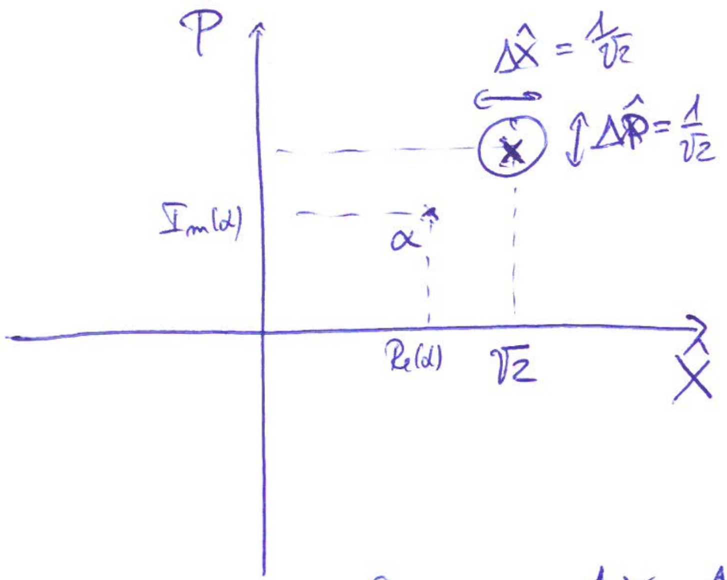
$$\langle P^2 \rangle = -\frac{(\hbar\beta)^2}{2} \langle \alpha | a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a | \alpha \rangle$$

$$= -\frac{(\hbar\beta)^2}{2} \left(\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2|\alpha|^2 - 1 \right)$$

$$= -\frac{(\hbar\beta)^2}{2} \left((\alpha - \alpha^*)^2 - 1 \right)$$

$$\Delta X = \sqrt{(\alpha + \alpha^*)^2 + 1 - (2\,\mathrm{Re}(\alpha))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}$$

$$\Delta P = \sqrt{-(\alpha - \alpha^*)^2 + 1 + (\alpha - \alpha^*)^2} \cdot \frac{\hbar\beta}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar\beta}{\sqrt{2}}$$



On a $\Delta X \cdot \Delta P = \frac{\hbar}{2}$

prend la valeur minimale possible.

3.1 $H = H_x + H_y$

$$[H_x, H_y] = 0$$

H_x et H_y admettent séparément une base de type oscillateur harmonique 1D avec

$$E^x_{n_x} = \hbar\omega_x (n_x + \tfrac{1}{2})$$

$$E^y_{n_y} = \hbar\omega_y (n_y + \tfrac{1}{2})$$

et $\omega_x = \omega_y$

La base propre de H peut donc s'écrire comme un produit tensoriel des deux bases précédentes. On note

$$|n, n'\rangle = |n\rangle_x \otimes |n'\rangle_y$$

$$E^{tot}_{n,n'} = \hbar\omega(n + n' + 1)$$

$$E^{tot}_m = \hbar\omega(m+1) \qquad m \in \mathbb{N}$$

Ls valeur propre de dégé $= m+1$

Le spectre de H est donc le m̂ que celui de H_x par exemple, à $\hbar\omega/2$ près, et un degrée de dégénérescence $m+1$.

3.2 Dégénérescence du spectre

$\Rightarrow$ H ne suffit pas à "trier" les états.

$\Rightarrow$ On va chercher un autre opérateur qui commute avec H et qui fasse la différence entre états de m énergie.

$$L_z = XP_y - YP_x$$

L_z commute manifestement avec H, qui est invariant par rotation autour de Oz.

3.3
$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}_x) \qquad a_d = (a_x + i a_y)/\sqrt{2}$$

$$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Y} - i P_y) \qquad a_g = (a_x - i a_y)/\sqrt{2}$$

$$H = \hbar\omega\,(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1)$$

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_d + a_g) \qquad a_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_d^+ + a_g^+)$$

$$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(a_d - a_g) \qquad a_y^+ = \frac{-1}{\sqrt{2}\,i}(a_d^+ - a_g^+)$$

$$H = \hbar\omega\Big(\frac{1}{2}(a_d^+ + a_g^+)(a_d + a_g) + \frac{1}{2}(a_d^+ - a_g^+)(a_d - a_g) + 1 \Big)$$

$$[a_d, a_d^+] = \frac{1}{2}[a_x + i a_y, a_x^+ - i a_y^+]$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{[a_x, a_x^+]}_{=1} + i\underbrace{[a_y, a_x^+]}_{=0} - i\underbrace{[a_x, a_y^+]}_{=0} + \underbrace{[a_y, a_y^+]}_{=1}\Big)$$

$$= 1$$

idem $[a_g, a_g^+] = 1$

$$H = \hbar\omega\Big(\frac{1}{2}(a_d^+ a_d + \cancel{a_g^+ a_d} + \cancel{a_d^+ a_g} + a_g^+ a_g)$$

$$+ \frac{1}{2}(a_d^+ a_d - \cancel{a_d^+ a_g} - \cancel{a_g^+ a_d} + a_g^+ a_g) + 1$$

$$= \hbar\omega(a_d^+ a_d + a_g^+ a_g + 1)\Big]$$

$$L_z = X P_y - Y P_x = \hbar(\hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x)$$

$$L_z/\hbar = -i(a_x + a_x^+)(a_y - a_y^+)/2$$

$$+ i(a_y + a_y^+)(a_x - a_x^+)/2$$

$$= \frac{i}{2}\Big[a_y a_x + a_y^+ a_x - a_y a_x^+ - a_y^+ a_x^+$$

$$- (a_x a_y + a_x^+ a_y - a_x a_y^+ - a_x^+ a_y^+)\Big]$$

On a $[a_x, a_x^+] = 1 = [a_y, a_y^+]$

mais $a_x^{(+)}$ et $a_y^{(+)}$ commutent car n'agissent pas sur m̂ espace.

↳ $L_z = i\hbar (a_y^+ a_x - a_y a_x^+)$

On a $a_d^+ a_d = \frac{1}{2}(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y - i a_x^+ a_y + i a_x a_y^+)$

et $a_g^+ a_g = \frac{1}{2}(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + i a_x^+ a_y - i a_x a_y^+)$

d'où $L_z = \hbar (a_d^+ a_d - a_g^+ a_g)$

Soit $N_d = a_d^+ a_d$ $\quad N_g = a_g^+ a_g$

On a :
- $a_{d,g}$ et $a_{d,g}^+$ suivent les mêmes règles de commutation que a_x, a_x^+, a_y, a_y^+
- On appelle N_d et N_g les opérateurs "nombres de quanta circulaires droite/gauche"

↳ $H = \hbar\omega (N_d + N_g + 1)$
$L_z = \hbar (N_d - N_g)$

3.4 On pose

$\alpha_x = |\alpha_x| e^{i\varphi_x}$

$\alpha_y = |\alpha_y| e^{i\varphi_y}$

Les deux nombres α_x, α_y n'ont donc pas nécessairement la même phase.

* On a montré en 2.4 que

$$\langle N \rangle = \langle a^+ a \rangle = |\alpha_0|^2$$

d'où, pour chacun des deux oscillateurs indépendants :

$$\langle N_x \rangle = |\alpha_x|^2$$

$$\langle N_y \rangle = |\alpha_y|^2$$

D'où $\langle H \rangle = \hbar\omega \left(|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2 + 1 \right)$

* Pour trouver $\langle L_z \rangle$ c'est plus compliqué car L_z a une expression simple seulement en fonction de N_d et N_g, et pas N_x et N_y.

On a par construction

$$\begin{cases} a_x |\alpha_x, \alpha_y\rangle = \alpha_x |\alpha_x, \alpha_y\rangle \\ a_y |\alpha_x, \alpha_y\rangle = \alpha_y |\alpha_x, \alpha_y\rangle \end{cases}$$

Donc $a_d |\alpha_x, \alpha_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_x - i\alpha_y) |\alpha_x, \alpha_y\rangle$

$$a_g |\alpha_x, \alpha_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_x + i\alpha_y) |\alpha_x, \alpha_y\rangle$$

Donc $|\alpha_x, \alpha_y\rangle$ est également vecteur propre de a_d et a_g, de valeurs propres respectives

$$\alpha_d \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_x - i\alpha_y) \quad \text{et} \quad \alpha_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_x + i\alpha_y)$$

D'où
$$\langle N_d \rangle = |\alpha_d|^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2 + i(\alpha_x\alpha_y^* - \alpha_x^*\alpha_y)\right)$$

et
$$\langle N_g \rangle = |\alpha_g|^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2 - i(\alpha_x\alpha_y^* - \alpha_x^*\alpha_y)\right)$$

On retrouve d'ailleurs bien que

$$\langle H \rangle = \hbar\omega\left(\langle N_d \rangle + \langle N_g \rangle + 1\right)$$
$$= \hbar\omega\left(|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2 + 1\right)$$

et par ailleurs
$$\langle L_z \rangle = \hbar\left(\langle N_d \rangle - \langle N_g \rangle\right)$$
$$= 2i\hbar\left(\alpha_x\alpha_y^* - \alpha_x^*\alpha_y\right)$$
$$= 2\hbar|\alpha_x||\alpha_y| \sin(\varphi_y - \varphi_x)$$

* I ncertitudes :

Comme calculé en 2.8 $\Delta N = |\alpha|$ dans un état quasi-classique, donc $\Delta N_x = |\alpha_x|$, $\Delta N_y = |\alpha_y|$, $\Delta N_d = |\alpha_d|$ et $\Delta N_g = |\alpha_g|$

Attention $\Delta(A+B)$ n'est pas $\Delta A + \Delta B$:

Si $N = N_x + N_y$

alors $$(\Delta N)^2 = \langle (N_x + N_y)^2 \rangle - (\langle N_x + N_y \rangle)^2$$
$$= \langle N_x^2 + N_y^2 + 2 N_x N_y \rangle - \langle N_x \rangle^2 - \langle N_y \rangle^2 - 2 \langle N_x \rangle \langle N_y \rangle$$
$$= (\Delta N_x)^2 + (\Delta N_y)^2 + 2 \underbrace{(\langle N_x N_y \rangle - \langle N_x \rangle \langle N_y \rangle)}_{\substack{= 0 \text{ car} \\ N_x \text{ et } N_y \text{ non corrélés}}}$$

d'où $\Delta H = \hbar\omega \sqrt{|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2}$

Pour calculer ΔL_z on note $N' = N_d - N_g$

$(\Delta N')^2 = (\Delta N_d)^2 + (\Delta N_g)^2$

et $$\Delta L_z = \hbar \sqrt{|\alpha_d|^2 + |\alpha_g|^2} = \hbar \sqrt{|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2}$$