Examen de Physique Quantique II, PNS2A, 2016-2017

# Etats quasi-classiques de l'oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique quantique uni-dimensionnel, dont on note $X$, $P$ et $H$ les opérateurs position, impulsion et énergie (hamiltonien).

On note $a$ et $a^\dagger$ les opérateurs d'annihilation et de création d'un quantum d'énergie de l'oscillateur harmonique, comme défini en cours.

On considère comme acquis les résultats suivants :

$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$, opérateur de vecteurs propres notés $|\varphi_n\rangle$

$\left[a, a^\dagger\right] = 1$,

$a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle$,

$a^\dagger|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle$.

On note $|\psi(t)\rangle$ l'état quantique du système à l'instant $t$.

Pour tout opérateur $A$, on note la moyenne quantique $\langle A\rangle(t) = \langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle$.

On appelle l'incertitude quantique de la mesure d'un opérateur $A$ dans l'état $|\psi\rangle$ la quantité

$$\Delta A = \sqrt{\langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle}.$$

## 1 Oscillateur harmonique classique

### 1.1

Soient $x(t)$ et $p(t)$ la position et l'impulsion (réelles !) d'un oscillateur harmonique classique à une dimension. On pose $\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ et on définit $\hat{x} = \beta\, x$, $\hat{p} = (\hbar\beta)^{-1}\, p$. Montrez que les équation du mouvement peuvent s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = \omega\,\hat{p},$$

$$\frac{d}{dt}\hat{p} = -\omega\,\hat{x}.$$

### 1.2

On pose $\alpha(t) = (\hat{x}(t) + i\,\hat{p}(t))/\sqrt{2}$. Décrivez l'évolution temporelle de $\alpha(t)$ en notant $\alpha_0 = \alpha(0) \in \mathbb{C}$. Représentez graphiquement l'évolution de $\alpha(t)$ dans le plan complexe. Représentez ensuite graphiquement $\alpha(t)$ dans le référentiel tournant à la pulsation $-\omega$ dans le plan complexe.

### 1.3

Ecrivez $\hat{x}(t)$ et $\hat{p}(t)$ en fonction de $\alpha_0$ et $\omega$.

### 1.4

Ecrivez l'énergie classique de l'oscillateur en fonction de $\alpha_0$. Que dire de la valeur de $|\alpha_0|^2$ pour un oscillateur dans la limite classique ?

# 2 Etats quasi-classiques de l'oscillateur harmonique quantique

On cherche un état quantique de l'oscillateur harmonique quantique dont les valeurs moyennes $\langle X\rangle$ et $\langle P\rangle$ aient la même dynamique que les fonctions $x$ et $p$ de l'oscillateur classique. Un tel état est appelé quasi-classique, ou encore de Glauber. On pose

$$\hat{X} = \beta\, X = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$$

$$\hat{P} = (\hbar\beta)^{-1}\, P = -i\,(a - a^\dagger)/\sqrt{2}$$

## 2.1

Comparez les expressions ci-dessus aux résultats trouvés en 1.3 et commentez.

## 2.2

Montrez que $\langle a\rangle(t) = \langle a\rangle(0)e^{-i\omega t}$. Donnez également $\langle a^\dagger\rangle(t)$.

## 2.3

Quelle valeur doit prendre $\langle a\rangle(0)$ pour avoir bien $\langle\hat{X}\rangle(t) = \hat{x}(t)$ et $\langle\hat{P}\rangle(t) = \hat{p}(t)$ ?

## 2.4

On impose de même que l'énergie moyenne $\langle H\rangle$ soit égale à son équivalent classique trouvé en 1.4 ; on négligera le terme purement quantique $\hbar\omega/2$ dans $H$. Montrez que cela implique $\langle a^\dagger a\rangle(0) = |\alpha_0|^2$.

## 2.5

On introduit l'opérateur $b = a - \alpha_0$. Montrez que $\langle b^\dagger b\rangle(0) = 0$ et déduisez-en que $|\psi(0)\rangle$ est un vecteur propre de $a$, de valeur propre $\alpha_0$.

Par conséquent, l'état quasi-classique $|\psi(t)\rangle$ associé à une dynamique classique caractérisée par le paramètre $\alpha_0$ est tel que $|\psi(0)\rangle$ est vecteur propre de $a$, de valeur propre $\alpha_0$. On écrira désormais $|\alpha\rangle$ le vecteur propre normé de $a$ tel $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

## 2.6

On développe formellement $|\alpha\rangle = \sum_n c_n|\varphi_n\rangle$ dans la base $\{|\varphi_n\rangle\}$ des états stationnaires de l'oscillateur harmonique. Montrez que

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, c_0,$$

puis que

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, |\varphi_n\rangle.$$

### 2.7

Montrez que si $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$, alors on a

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}\,|\alpha = \alpha_0\,e^{-i\omega t}\rangle.$$

Commentez.

### 2.8

Le système est dans l'état quasi-classique $|\alpha\rangle$ donné. On effectue une mesure de l'énergie. Décrivez l'issue de la mesure en termes probabilistiques. Calculez la valeur moyenne de l'énergie ainsi que l'incertitude dans l'état $|\alpha\rangle$. Il est conseillé pour cela d'écrire $H$ en fonction de $a$ et $a^\dagger$. L'énergie de l'état $|\alpha\rangle$ est-elle plutôt bien ou mal définie dans la limite $|\alpha| \gg 1$ ?

### 2.9

Calculez également la valeur moyenne et l'incertitude de la position et de l'impulsion. Représentez l'état du système, de manière analogue à la question 1.2 par une ellipse centrée sur le point $(\langle\hat{X}\rangle, \langle\hat{P}\rangle)$ et de longueur d'axes principaux $\Delta\hat{X}$ et $\Delta\hat{P}$. Commentez.

## 3 Etats quasi-classiques d'un oscillateur en deux dimensions

On considère désormais un oscillateur harmonique bi-dimensionnel isotrope, d'hamiltonien

$$H = H_x + H_y = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 X^2}{2} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Y^2}{2}$$

### 3.1

Discutez en détail les propriétés de la base propre et du spectre de $H$.

### 3.2

Discutez l'intérêt d'introduire la composante selon $z$ du moment cinétique $L_z = XP_y - YP_x$.

### 3.3

Soient $a_x$ et $a_y$ les opérateurs d'annihilation associés à chaque couple d'observables $(X, P_x)$ et $(Y, P_y)$, respectivement. On définit par ailleurs les opérateurs $a_d = (a_x + ia_y)/\sqrt{2}$ et $a_g = (a_x - ia_y)/\sqrt{2}$. Donnez une expression simple de $H$ et de $L_z$ en fonction de ces derniers et commentez la dénomination d'*opérateur d'annihilation d'un quantum circulaire droit/gauche*.

### 3.4

On considère que l'état de l'oscillateur selon chacune des directions $x, y$ est dans un état quasi-classique $|\alpha_{x,y}\rangle$. On note donc l'état du système $|\alpha_x, \alpha_y\rangle = |\alpha_x\rangle \otimes |\alpha_y\rangle$. Calculez les valeurs moyennes et les incertitudes sur $H$ et $L_z$ dans cet état. Commentez.