1.1

Nous avons rencontré le rayon de Bohr a_0 comme une échelle de longueur naturelle du système en posant :

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} \underbrace{\left(\frac{1}{a_0}\right)^2}_{\sim k^2} - \frac{K}{a_0}$$

Si on impose aux deux termes de droite d'être égaux, on trouve $a_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu K}$, ce qui est à un facteur 2 près la définition de a_0, et donc $a_0 \propto \frac{1}{\mu}$.

Par le même argument $E_I \sim \frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} \sim \frac{K}{a_0}$
$\propto \mu$.

1.2 Dans le modèle de l'atome d'hydrogène, on décrit en réalité le mouvement d'une particule de masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ dans ~~le~~ le référentiel centré ~~sur~~ son barycentre.

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, $m_{p^+} \simeq 2000\, m_{e^-}$

donc $\mu \simeq m_{e^-}$ à $< 0.1\%$

Dans le cas du muonium, $m_{\mu^+} \simeq 200\, m_{e^-}$

donc $\mu \simeq m_{e^-}$ reste vrai à $< 1\%$

Dans le cas du positronium, $m_{e^+} = m_{e^-}$,

donc $\mu = \frac{1}{2} m_{e^-}$.

A part la masse réduite, le muonium et le positronium auront des propriétés angulaires identiques à l'atome d'H : même base d'orbitales etc.
On aura aussi un spectre de la forme $E_n = -\frac{E_I'}{n^2}$
La masse affecte cependant le spectre et le rayon de Bohr (et donc les propriétés radiales par une loi d'échelle).

Pour le muonium, tout reste cependant identique à l'atome d'H à $\sim 1\%$.

Pour le positronium, comme $a_0' \propto \frac{1}{\mu}$ et $E_I' \propto \mu$, le rayon de Bohr est deux fois plus grand et l'énergie d'ionisation deux fois plus petite.

1.3 L'e^- ainsi que l'autre particule sont des spins $1/2$, donc la base canonique s'écrit $\{|\underset{\uparrow \atop e^-}{\pm}, \underset{\uparrow \atop \mu^+ \text{ ou } e^-}{\pm}\rangle\} = |+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle$

1.4 Comme vu en cours pour le couplage spin-orbite, H_{hf} n'est pas diagonal dans la base canonique. Par contre, il l'est dans la base propre du moment cinétique composé $\vec{F}$.

Celle-ci s'écrit :

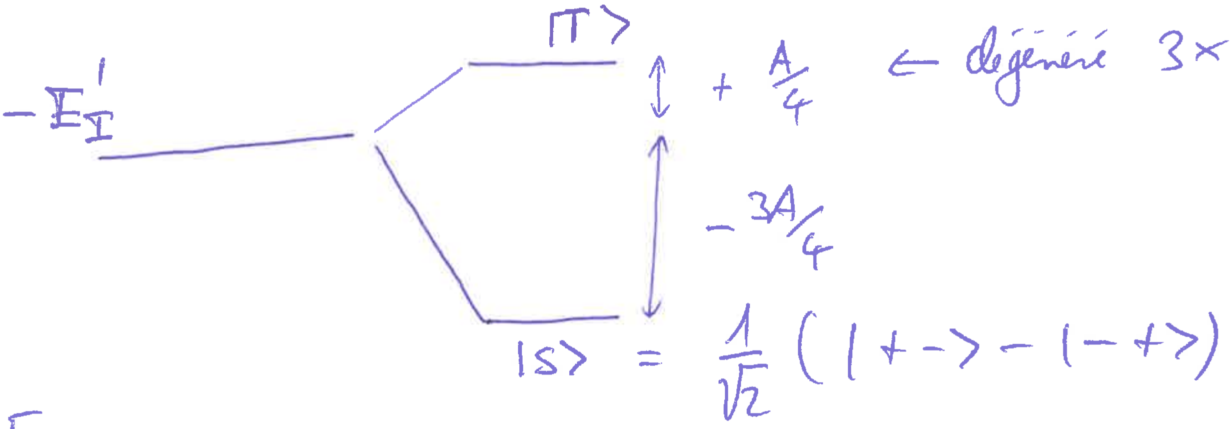
$$\text{triplet} \begin{cases} |\underset{\uparrow \atop f}{1}, \underset{\uparrow \atop m_f}{1}\rangle = |+,+\rangle \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle) \\ |1,-1\rangle = |-,-\rangle \end{cases}$$

$$\text{singulet } \{ |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

On a $H_{hf} = \frac{A}{\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{A}{2\hbar^2}\left(\vec{F}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2\right)$

$$= \frac{A}{2}\begin{pmatrix} 2-2\times\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\times\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2\times\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\times\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{A}{4}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

dans cette base.



1.5

Dans l'état fondamental du muonium, l'e^- et le μ^+ sont dans un état orbital relatif 1s d'énergie très proche de $-13{,}6$ eV. Leurs spins respectifs forment un état singulet, d'énergie plus basse que le triplet de A.

2.1 On a $\gamma_i \propto \dfrac{q}{m}$ ← charge, ← masse

Le muon$^+$ a une mass $\gg m_e$, donc $\gamma_{\mu^+} \ll |\gamma_{e^-}|$

Le positron a la $\hat{m}$ masse mais une charge opposée à l'e^-, donc $\gamma_{e^+} = -\gamma_{e^-} > 0$

2.2 $-\vec{M}\cdot\vec{B}$ est homogène à une énergie

et donc $\omega_i = -\gamma_i B_0 = \dfrac{|\vec{M}|\cdot B_0}{|\vec{S}|}$ ← homogène à $\hbar$

est bien homogène à une pulsation.

L'hamiltonien Zeeman de l'état lié est la somme des termes Zeeman des deux spins.

$$H_Z = -\vec{M}_1\vec{B} - \vec{M}_2\vec{B} \qquad \text{car } \vec{B} \,/\!/\, Oz$$
$$= \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$$

2.3
$$H_Z|1,1\rangle = (\omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z})\,|++\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2)\,|++\rangle$$

$$H_Z|1,0\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\Big((\omega_1 - \omega_2)\,|+,-\rangle + (\omega_2 - \omega_1)\,|-+\rangle\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_2)\,|0,0\rangle$$

$$H_Z\,|1,-1\rangle = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1+\omega_2)\,|--\rangle$$

$$H_Z\,|0,0\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\Big((\omega_1-\omega_2)\,|+-\rangle - (\omega_2-\omega_1)\,|-+\rangle \Big)$$

$$= \frac{\hbar}{2}(\omega_1-\omega_2)\,|1,0\rangle$$

Donc

$$H_{hf}+H_Z = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A/4+\frac{\hbar}{2}(\omega_1+\omega_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/4-\frac{\hbar}{2}(\omega_1+\omega_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A/4 & \frac{\hbar}{2}(\omega_1-\omega_2) \\ 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}(\omega_1-\omega_2) & -\frac{3A}{4} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \quad & \quad \uparrow \quad & \quad \uparrow \quad & \quad \uparrow \\ |1,1\rangle \quad & \quad |1,-1\rangle \quad & \quad |1,0\rangle \quad & \quad |0,0\rangle \end{matrix} \end{array}$$

2.4 On a déjà trouvé E_1 et E_2. Reste à diagonaliser $H_{hf}+H_Z$ dans le sous espace engendré par $|1,0\rangle$ et $|0,0\rangle$.

Par l'argument du déterminant on trouve

$$\left(A/4-E\right)\left(-3A/4-E\right)-\left(\frac{\hbar}{2}(\omega_1-\omega_2)\right)^2=0$$

$$E^2 + E\frac{A}{2} - 3\left(\frac{A}{4}\right)^2 - \left(\frac{\hbar}{2}(\omega_1-\omega_2)\right)^2 = 0$$

$$E_{\pm} = -\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{3A^2}{16} + \left(\frac{\hbar}{2}(\omega_1-\omega_2)\right)^2\right)}$$

$$= -\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + \hbar^2(\omega_1-\omega_2)^2}$$

$$= E_3 \text{ et } E_4$$

2.5

Muonium

$$\gamma_{\mu^+} \ll |\gamma_{e^-}|$$

$$\Rightarrow |\omega_2| \ll |\omega_1|$$

2.5 Muonium

$B_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_2 = 0$

$$E_1 = E_2 = \frac{A}{4}$$

$$E_3 = \frac{A}{4} \qquad E_4 = -\frac{3A}{4}$$

$B_0 \to +\infty$

$$E_1 \simeq \hbar(\omega_1 + \omega_2)/2 \qquad \propto B_0$$

$$E_2 \simeq -\hbar(\omega_1 + \omega_2)/2 \qquad \propto -B_0$$

$$E_3 \simeq \frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$E_4 \simeq -\frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

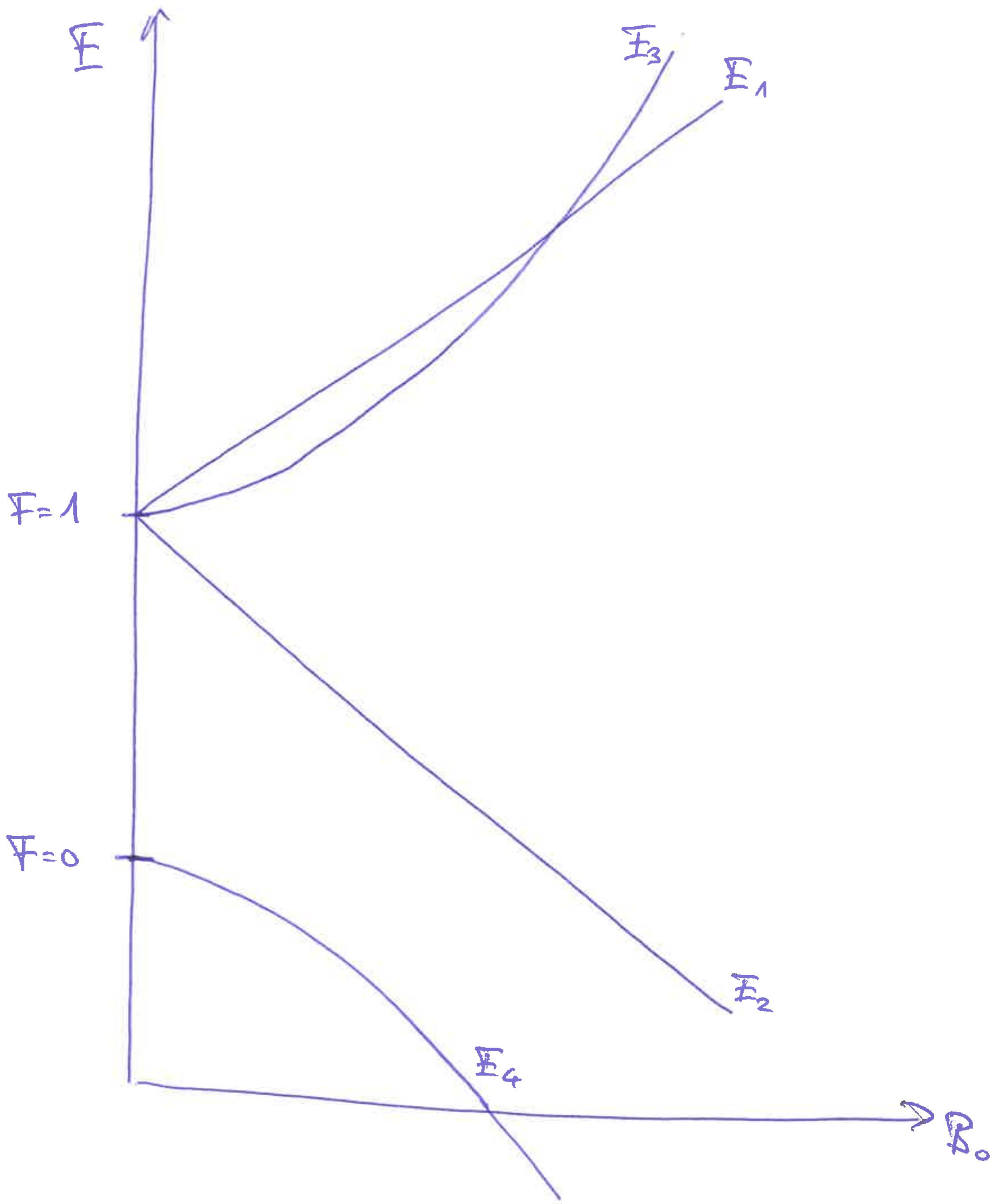
Muonium : $\omega_1 > 0$ (électron)

$\omega_2 < 0$ (muon)

et $|\omega_2| \ll \omega_1$ pour un m̂ B_0

Donc à fort champ, la pente $\frac{dE}{dB}$ la plus forte est celle de E_3, suivie de près de celle de E_1.

La pente descendante la plus raide est celle de E_4, suivie de près de E_3



E_3 et E_4 ont tous les deux une pente nulle à $B_0 = 0$

Il y a à un moment un croisement de niveaux entre E_1 et E_3

2.6 Positronium

ici $-\omega_2 = \omega_1 > 0$

Les 4 énergies deviennent alors

$$E_1 = A/4 = E_2$$

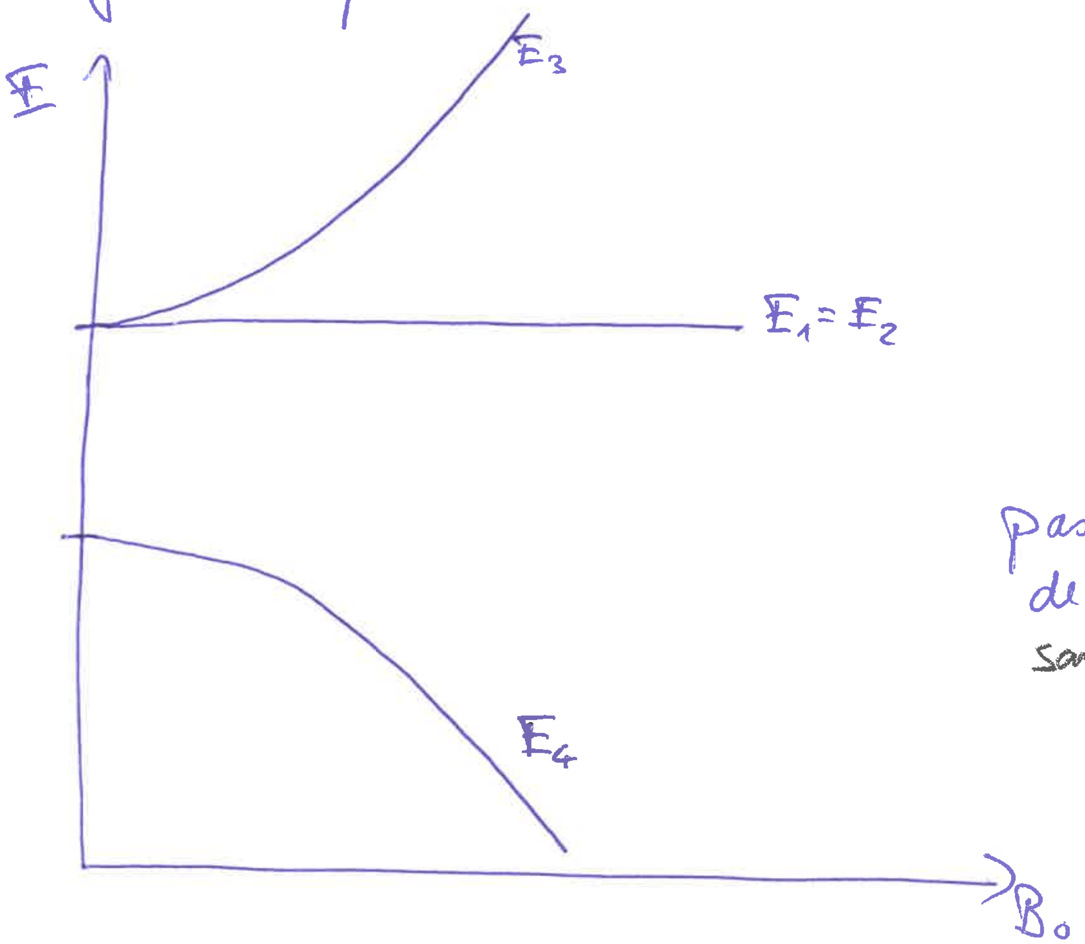
$$E_3 = -\frac{A}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4\hbar^2\omega_1^2}$$

$$E_4 = -\frac{A}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4\hbar^2\omega_1^2}$$

↳ E_1 et E_2 sont constants

E_3 et E_4 ont une pente nulle en $B_0 = 0$

les deux ont un comportement $\propto \pm \hbar\omega_1$ à fort champ



pas de croisement de niveaux sauf à $B_0 = 0$

3.1 base canonique : $|m_{e^-}, m_{\mu^+}\rangle$

$$\underbrace{|+,+\rangle}, \ |+,-\rangle, \ \underbrace{|-,+\rangle}, \ |-,-\rangle$$

ces deux vecteurs sont des états propres de S_{zz} associés à la valeur propre $+\frac{\hbar}{2}$.

Donc $|\psi\rangle = \alpha |+,+\rangle + \beta |-,+\rangle$

avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

On a par ailleurs

$|+,+\rangle = |1,1\rangle$

et $|-,+\rangle = (|1,0\rangle - |0,0\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}$

d'où $|\psi\rangle = \alpha |1,1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1,0\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}} |0,0\rangle$

3.2 $H_{hf} |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$

$$\frac{A}{4} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \\ \dot{d} \end{pmatrix}$$

base$(|1,1\rangle, |1,-1\rangle, |1,0\rangle, |0,0\rangle)$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(0)\, e^{-iAt/4\hbar} \\ b(0)\, e^{-iAt/4\hbar} \\ c(0)\, e^{-iAt/4\hbar} \\ d(0)\, e^{+3At/4\hbar} \end{pmatrix}$$

avec

$$a(0) = \alpha$$
$$b(0) = 0$$
$$c(0) = \beta/\sqrt{2}$$
$$d(0) = -\beta/\sqrt{2}$$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-iAt/4\hbar} |1,1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} e^{-iAt/4\hbar} |1,0\rangle - \beta/\sqrt{2}\, e^{3iAt/4\hbar} |0,0\rangle$$

3.2

$$* \quad \Pi_+^2 = \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{4}{\hbar} S_{2z} + \frac{4}{\hbar^2} \underbrace{S_{2z}^2}_{= \frac{\hbar^2}{4} \cdot \mathbb{1}}\Big) = \frac{1}{4}\Big(2 + \frac{4}{\hbar} S_{2z}\Big) = \Pi_+$$

Soit $|\psi\rangle = \alpha|+,+\rangle + \beta|-,+\rangle$

$$* \quad \Pi_+ |\psi\rangle = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{2}{\hbar} S_{2z}\Big)\big(\alpha|+,+\rangle + \beta|-,+\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\alpha\Big(1 + \frac{2}{\hbar}\Big(+\frac{\hbar}{2}\Big)\Big)|+,+\rangle + \beta\Big(1 + \frac{2}{\hbar}\Big(+\frac{\hbar}{2}\Big)\Big)|-,+\rangle\Big)$$

$$= \alpha|+,+\rangle + \beta|-,+\rangle = |\psi\rangle$$

* $\Pi_+ |\psi'\rangle = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\hbar} S_{2z}\right)\left(\gamma |-,-\rangle + \delta |+,-\rangle\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\gamma\left(1 + \frac{2}{\hbar}\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\right)|-,-\rangle + \delta\left(1 + \frac{2}{\hbar}\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\right)|+,-\rangle\right)$

$= 0$

3.4 $p(t)$ est par définition la norme carrée de la projection de $|\psi(t)\rangle$ sur le sous-espace propre associé à la valeur propre recherchée.

$p(t) = \| \Pi_+ |\psi(t)\rangle \|^2 = \langle \psi(t) | \Pi_+^2 | \psi(t)\rangle$

↳ Π_+ est hermitien

$= \langle \psi(t) | \Pi_+ | \psi(t)\rangle.$

$$\cancel{= \langle \psi(t) | \left(\alpha e^{-iAt/4\hbar} |++\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} e^{-iAt/4\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} |-+\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}} e^{3iAt/4\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|-+\rangle\right) \right)}$$

$\cancel{= |\alpha|^2 +}$

$$\Pi_+ |\psi(t)\rangle = \alpha e^{-iAt/4\hbar} |++\rangle$$

$$+ \frac{\beta}{\sqrt{2}} e^{-iAt/4\hbar} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} |-+\rangle$$

$$- \frac{\beta}{\sqrt{2}} e^{3iAt/4\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|-+\rangle\right)$$

$$= \alpha e^{-iAt/4\hbar} |++\rangle + \frac{\beta}{2}\left(e^{-iAt/4\hbar} + e^{3iAt/4\hbar}\right)|-+\rangle$$

$$p(t) = |\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{4} \left|1 + e^{iAt/\hbar}\right|^2$$

$$= |\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{4}\left((1+\cos)^2 + \sin^2\right)$$

$$= |\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{4}\left(1 + 2\cos + 1\right) = |\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2}\left(1 + \cos\frac{At}{\hbar}\right)$$

3.5

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \cos\frac{At}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{3 + \cos(At/\hbar)}{4}$$

Oscille entre $1/2$ (état non polarisé en spin du muon) et 1 (état 100% polarisé du muon).