Examen de Physique Quantique II

PHELMA PNS 2A, 2018/2019

Propriétés magnétiques du muonium

Les muons sont des fermions élémentaires, de spin 1/2 et avec une masse environ 200 fois plus grande que l'électron (noté e^-), et donc environ 10 fois plus petite que le proton. Les muons peuvent avoir une charge $\pm e$, la charge élémentaire. Nous nous intéresserons par la suite au muon chargé positivement, que nous notons μ^+.

Notre étude porte ici sur les états liés appelés hydrogénoïdes, formés par un électron (de charge $-e$) et une autre particule de charge $+e$ et de masse différente de celle du proton. Nous considérerons principalement l'état lié $e^- - \mu^+$, appelé muonium. Au début du problème nous considérerons également la possibilité de l'électron de s'apparier avec son antiparticule, le positron e^+, de même masse que l'e^- et de charge opposée. L'ensemble $e^- - e^+$ est appelé positronium.

Appelons $\mathbf{S}_1$ l'opérateur de spin de l'électron et $\mathbf{S}_2$ celui de l'autre particule (μ^+ ou e^+), qui possède aussi un spin 1/2. Ces deux spins interagissent via un hamiltonien de couplage de la forme

$$H_{\mathrm{hf}} = \frac{A}{\hbar^2}\,\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \tag{1}$$

où A est un scalaire réel petit devant les échelles d'énergie typiques du spectre orbital de l'état lié. On appelle $\mathbf{F} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ le moment cinétique total résultant.

On rappelle que le facteur gyromagnétique de spin d'une particule de charge q et de masse m est $\gamma = g\frac{q}{2m}$, avec g un coefficient numérique positif de l'ordre de 1, qui vaut ≈ 2 pour l'électron. Le moment magnétique résultant est $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{S}$.

1 Structure hyperfine des états liés

1.1

Justifiez, soit parce que vous connaissez la formule, soit par un argument qualitatif développé en cours, que le rayon de Bohr d'un atome hydrogénoïde varie comme l'inverse de la masse réduite des deux particules en interaction, alors que l'énergie de liaison varie proportionnellement à la masse réduite.

1.2

Grâce au concept de masse réduite et sans calculs élaborés, donnez les propriétés orbitales du positronium et du muonium, comme leurs énergies et fonctions d'onde propres. Vous expliquerez par exemple comment se compare le rayon de Bohr du positronium et du muonium à celui de l'atome d'hydrogène. Et qu'en est-il de leurs énergies de liaison ?

1.3

Dans toute la suite, on considère que le système est dans l'état orbital $1s$ et nous nous intéresserons uniquement aux degrés de liberté de spin à l'intérieur de cet état orbital. Donnez la base canonique dans l'espace des propriétés de spin de cet état.

1.4

Explicitez les vecteurs propres communs de $\mathbf{F}^2$ et F_z, justifiez que ce sont des vecteurs propres de H_{hf} (et donc de l'hamiltonien total) et calculez enfin la structure dite *hyperfine* des valeurs propres de H_{hf} dans le niveau $1s$ (un diagramme d'énergies sera le bienvenu).

1.5

Décrivez qualitativement les propriétés de l'état fondamental du muonium.

2 Effet Zeeman

2.1

On applique maintenant un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B} = B_0\vec{u}_z$. L'électron ainsi que la particule avec laquelle il forme un état lié ont chacun un moment magnétique $\mathbf{M}_i = \gamma_i \mathbf{S}_i$, avec γ_i le facteur gyromagnétique de chaque espèce de spins. Justifiez que $\gamma_{\mu^+} \ll |\gamma_{e^-}|$ et $\gamma_{e^+} = -\gamma_{e^-}$.

2.2

On pose $\omega_i = -\gamma_i B_0$. Justifiez que l'hamiltonien Zeeman de l'état lié s'écrit $H_Z = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$.

2.3

Ecrivez $H_{\mathrm{hf}} + H_Z$ sous forme d'une matrice 4x4 dans la base développée en 1.4.

2.4

Montrez que les 4 valeurs propres de cette matrice sont respectivement égales à
$E_1 = A/4 + \hbar(\omega_1 + \omega_2)/2$,
$E_2 = A/4 - \hbar(\omega_1 + \omega_2)/2$,
$E_3 = -A/4 + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + \hbar^2(\omega_1 - \omega_2)^2}$
et $E_4 = -A/4 - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + \hbar^2(\omega_1 - \omega_2)^2}$.

2.5

Représentez graphiquement l'évolution de ces 4 valeurs propres avec B_0 dans le cas du **muonium**, en exprimant leur comportement limite pour $B_0 \to 0$ et $B_0 \to +\infty$.

2.6

Représentez graphiquement l'évolution de ces 4 valeurs propres avec B_0 dans le cas du **positronium**, en exprimant leur comportement limite pour $B_0 \to 0$ et $B_0 \to +\infty$.

3 Rotation de spin des muons

La spectroscopie par rotation de spin des muons (sigle μSR en anglais) est un outil avancé pour étudier les inhomogénéités du champ magnétique local d'un échantillon. Elle a entre autres permis de révéler la nature non-conventionnelle de la supraconductivité dans le composé $\mathrm{Sr_2RuO_4}$ (G.M. Luke *et al., "Time-reversal symmetry-breaking superconductivity in* Sr_2RuO_4*"*, Nature **394**, 558 (1998)). Lorsqu'un muon de haute énergie (produit par un accélérateur de particules) pénètre un cristal, il perd rapidement son énergie par des diffusions coulombiennes successives (qui n'affectent donc pas son spin). Il peut ensuite s'arrêter en position intersticielle dans la maille du réseau cristallin et former un état lié avec un électron. Nous considérons cependant dans la suite seulement la rotation de spin du muonium dans le vide.

3.1

L'hamiltonien est donné par l'Eq. (1). Ecrivez dans la base canonique la forme générale d'un état propre de valeur propre $+\hbar/2$ de S_{2z} (indice : c'est la combinaison linéaire de deux vecteurs de cette base). Montrez que cet état propre, que nous noterons $|\psi\rangle$, sécrit dans la base propre de H_{hf} sous la forme

$$|\psi\rangle = \alpha|1,1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}}|0,0\rangle$$

Notez que le signe du 3e terme de droite dépend de si vous avez choisi $|+,-\rangle - |-,+\rangle$ ou $|-,+\rangle - |+,-\rangle$ comme base de l'état singulet - c'est le même vecteur au signe près. Si vous trouvez un $+\beta/\sqrt{2}$, ce n'est pas forcément un problème.

3.2

On suppose que l'état de spin du muonium à l'instant intial $|\psi(t = 0)\rangle$ est préparé dans l'état ci-dessus. Calculez $|\psi(t)\rangle$ à tout instant ultérieur sous l'action de H_{hf}.

3.3

Pour montrer qu'un opérateur P est un projecteur sur un sous-espace donné on démontrera que $P^2 = P$, que pour tout vecteur $|\psi\rangle$ de ce sous-espace $P|\psi\rangle = |\psi\rangle$ et pour tout vecteur $|\psi'\rangle$ du sous-espace complémentaire $P|\psi'\rangle = 0$.

Montrez que l'opérateur $\pi_+ = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{\hbar} S_{2z})$ est le projecteur sur le sous-espaces propre de S_{2z} associé à la valeur propre $+\hbar/2$.

3.4

Justifiez que pour l'état $|\psi(t)\rangle$ la probabilité que que le spin du muon soit toujours dans l'état polarisé + au temps t s'écrit $p(t) = ||\pi_+|\psi(t)\rangle||^2$ et montrez que

$$p(t) = |\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2}(1 + \cos(At/\hbar))$$

3.5

Comme on ne peut pas contrôler la polarisation de spin de l'électron (donnée par le poids respectif de $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$) dans cette expérience, celle-ci est moyennée statistiquement en pratique et $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. Donnez ainsi l'expression complète de la probabilité expériementalement observée $\bar{p}(t)$. Commentez.

3.6 Pour aller plus loin : Muonium dans le silicium

La suite est hors barème. On admettra qu'en absence de champ magnétique, l'hamiltonien du muonium piégé en position intersticielle du silicium (et qui est toujours dans son état fondamental orbital $1s$) est maintenant donné par

$$H = \frac{A'}{\hbar^2} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{D}{\hbar^2} S_{1z} S_{2z}$$

Le coefficient A' peut différer de A mais reste positif. Le coefficient D est négatif. L'axe z est imposé par la symétrie du cristal.

En reprenant avec le hamiltonien ci-dessus la démarche effectuée depuis le début de cette section (diagonalisation, dynamique, projection), il est possible de calculer que dans ce cas

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos(2Dt/\hbar) + \frac{1}{4}\cos((A' + 2D)t/\hbar)$$

L'analyse de Fourier du signal de spin des muons permet ainsi de remonter à $2D$ et $A' + 2D$.

Ces calculs sont détaillés dans *Mécanique Quantique*, J.L. Basdevant, Ecole Polytechnique et Ellipses, 1986 (pp. 530 et suivantes). Les applications réelles en physique du solide arrivent en particulier lorsque l'on ajoute à l'hamiltonien un terme Zeeman avec un champ B variable dans l'espace.