Examen de Physique Quantique II

Phelma IPhy 2A, Janvier 2020

Magnétisme d'une boîte quantique semiconductrice

On s'intéresse à des boîtes quantiques semi-conductrices constituées par un îlot de InAs, à l'intérieur d'un cristal de GaAs, en forme de lentille comme montré sur l'image ci-contre. La boîte quantique contient par ailleurs sur son axe une impureté de manganèse Mn en substitution (non visible sur l'image), qui est chargée négativement et que l'on représente par une charge $-e$ et un spin $S_1 = 5/2$. Le potentiel de confinement produit par la boîte quantique ainsi que par l'ion Mn peut conduire au confinement d'un trou (de charge $+e$ et de masse effective m^*) dans la bande de valence. Ce trou possède un moment cinétique intrinsèque (appelé "spin du trou") $S_2 = 3/2$. Nous allons nous intéresser aux états liés formés par l'accepteur Mn^- et le trou.

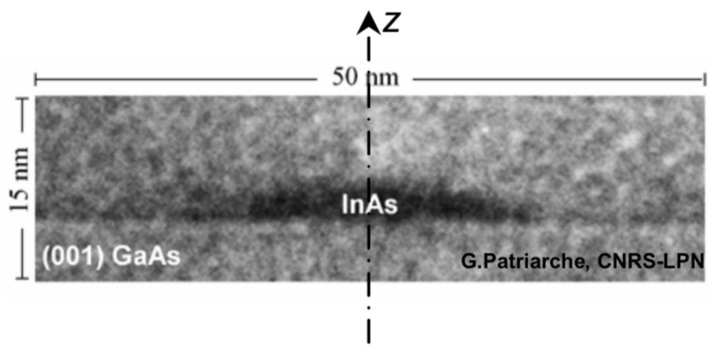

Figure 1: Coupe à travers (Image en transmission électronique) une boîte quantique du semiconducteur InAs, insérée dans une couche paisse du semiconducteur GaAs. Une telle boîte quantique a une forme de lentille aplatie dans le plan de la couche. On notera z la direction normale à ce plan. Une impureté Mn peut se trouver au centre de cette boîte quantique.

1 Propriétés orbitales de l'état lié

1.1

Justifier brièvement (une dizaine de lignes au maximum) qu'on recherche les états propres de l'opérateur défini par

$$H_{\text{orb}} = \frac{\hbar^2 \Delta}{2m^*} + V(r,\theta) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

où ϵ est la constante diélectrique du matériau et V décrit le potentiel de confinement de la boîte quantique.

1.2

Est-ce que L_z est une quantité conservée de cet hamiltonien ? Interpréter.

1.3

Est-ce que $\mathbf{L}^2$ est une quantité conservée de cet hamiltonien ? Est-ce que les harmoniques sphériques sont une base des fonctions d'onde orbitales du trou ?

2 Couplage magnétique Mn^- – trou

On s'intéresse dorénavant aux effets dus à la présence d'un spin effectif $S_1 = 5/2$ sur l'atome Mn et d'un spin $S_2 = 3/2$ sur le trou. On supposera pour simplifier que la partie orbitale et la partie de l'interaction magnétique (spins) restent complètement séparées. On oublie donc l'état orbital pour toute la suite.

Le couplage magnétique entre les moments cinétiques respectifs du Mn^- et du trou s'écrit sous la forme habituelle de produit scalaire

$$H_m = \alpha\, \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2,$$

avec α réel et positif. Ici et dans toute la suite on pose $\hbar = 1$.

2.1

Justifiez l'intérêt du moment cinétique total $\mathbf{J} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ pour trouver les états et énergies propres de H_m.

2.2

Sans chercher à donner l'expression des états propres dans la base canonique, décrivez les quatre niveaux d'énergie de H_m et leur dégénérescence.

2.3

Montrer que les énergies des différents multiplets sont respectivement $E_4 = \frac{15}{4}\alpha$, $E_3 = -\frac{1}{4}\alpha$, $E_2 = -\frac{13}{4}\alpha$ et $E_1 = -\frac{21}{4}\alpha$.

2.4

On applique un champ magnétique $\mathbf{B}$ uniforme et constant suivant la direction z. L'état lié Mn^- – trou est alors soumis à l'effet Zeeman, d'Hamiltonien

$$H_Z = -g\mu_B\, \mathbf{J} \cdot \mathbf{B},$$

où $g \sim 2$ et μ_B est le magnéton de Bohr. Montrer que H_Z commute avec H_m.

2.5

Dans toute la suite nous allons limiter notre étude à l'intérieur du multiplet fondamental (donc d'énergie E_1) déterminé ci-dessus. Donner les états propres et énergies propres de $H_Z + H_m$ dans ce sous-espace.

3 Anisotropie axiale

La boîte quantique a une forme aplatie dans le plan de la couche, et en première approximation circulaire dans ce plan. L'impureté magnétique est placée sur l'axe. On a donc une anisotropie qui conserve l'invariance par rotation autour de l'axe z. On s'intéresse à l'effet de cette anisotropie à l'intérieur du triplet fondamental de H_m ($J = 1$) identifié dans la section précédente.

3.1

Justifiez qu'un Hamiltonien de type $H_{\mathrm{an}} = -\beta J_z^2$, où $0 < \beta \ll \alpha$, est compatible avec l'anisotropie axiale de la boîte quantique.

3.2

On suppose pour l'instant $B = 0$. Calculer l'effet de H_{an} à l'intérieur du triplet fondamental. On montrera que cet Hamiltonien sépare un singulet et un doublet (= deux vecteurs de même énergie), dont on identifiera les valeurs propres.

3.3

On applique un champ magnétique suivant z. Calculer l'effet combiné de $H_{\mathrm{an}} + H_Z$ à l'intérieur du triplet. Tracer schématiquement les niveaux en fonction de B et commentez.

4 Anisotropie dans le plan

En plus de l'anisotropie ci-dessus, une anisotropie dans le plan (boîte de forme elliptique ; cette hypothèse contredit bien sûr notre hypothèse sur la forme de V dans la partie I) conduit à introduire dans l'Hamiltonien un terme supplémentaire $H_{\mathrm{plan}} = \gamma(J_x^2 - J_y^2)$, où $0 < \gamma < \beta$. On admettra qu'une bonne approximation consiste à diagonaliser $H_{\mathrm{plan}} + H_Z$ à l'intérieur du triplet fondamental précédemment identifié.

4.1

Exprimer H_{plan} fonction des $J_\pm$.

4.2

Ecrire l'action de $J_\pm$ sur chacun des vecteurs du triplet fondamental, puis donnez l'expression de H_{plan} sous forme d'une matrice 3×3 dans cette base. Déterminer ses valeurs propres (les vecteurs propres ne sont pas demandés).

4.3

Ecrivez maintenant $H_{\mathrm{tot}} = H_{\mathrm{plan}} + H_{\mathrm{an}} + H_Z$ sous forme matricielle et déterminez-en les valeurs propres.

4.4

Tracer schématiquement les énergies propres en fonction du champ magnétique appliqué.

Ce sujet est adapté d'après un sujet d'examen élaboré par J. Cibert, lui-même inspiré de l'article "Optically Probing the Fine Structure of a Single Mn Atom in an InAs Quantum Dot", par A. Kudelski, A. Lemaître, A. Miard, P. Voisin, T. C. M. Graham, R. J. Warburton, et O. Krebs, Phys. Rev. Lett. 99, 247209 (2007).