Classe Inversée II : Quantification canonique

Soient $f(p,q)$ et $g(p,q)$ deux fonctionnelles des coordonnées généralisées ($p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ est le moment conjugué associé à q_i). On définit le *crochet de Poisson*

$$\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right).$$

Soient F et G les observables quantiques associées à f et g respectivement. Le principe de *correspondance classique-quantique*, formulé par P. Dirac, donne l'identification suivante :

$$\{f,g\} \;\leftrightarrow\; \frac{1}{i\hbar}\,[F,G]\,.$$

1 Commutateurs élémentaires

Posez $f = q_i$ et $g = p_i$. Démontrez la relation de commutation $[Q_i, P_i] = i\hbar\mathbb{I}$.

2 Théorème de Liouville

Posez $g = \mathcal{H}$. Calculez $\{f, \mathcal{H}\}$ en utilisant les équations de Hamilton-Jacobi. Déduisez-en le théorème de Liouville

$$\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

3 Conclusion

Commentez la version quantique du théorème de Liouville.

Solution 1

On trouve $\{q_i, p_i\} = 1$. De par le principe de correspondance, on a alors $[Q_i, P_i] = i\hbar\mathbb{I}$.

Solution 2

$$\begin{aligned}
\{f, \mathcal{H}\} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \\
&= \frac{df}{dt} - \frac{\partial f}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Solution 3

Le résultat ci-dessus ressemble beaucoup au théorème suivant pour une observable A

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle,$$

où la notation $\langle A \rangle$ signifie la moyenne quantique sur l'état $\mid \psi \rangle$, notée

$$\langle \psi \mid A \mid \psi \rangle.$$

Ce résultat est dû à W. Heisenberg et conduit au théorème d'Ehrenfest.