TD1 de physique quantique

PHELMA PNS 2A

Problème I : Relation d'incertitude de Heisenberg

Soit $|\psi\rangle$ un vecteur d'état, on considère $|\phi\rangle = (X + i\lambda P_X)|\psi\rangle$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.) Calculer $\langle\phi|\phi\rangle$.
2.) On considère $\langle\phi|\phi\rangle$ en tant que polynôme en λ. Que dire de son discriminant ?
3.) On pose $X' = X - \langle X\rangle$ et $P'_X = P_X - \langle P_X\rangle$. Recommencez les raisonnnements ci-dessus en remplaçant X et P_X par X' et P'_X et déduisez-en l'inégalité de Heisenberg sur la position/impulsion.

Problème II : Commutateurs

X et P_X sont les opérateurs position et impulsion selon l'axe x.

1.) Expliquez et démontrez la relation $[X, P_X] = i\hbar$.
2.) Soient A, B et C des opérateurs du même espace. Démontrez la relation $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.
3.) Déduisez-en $[X^n, P_X] = i\hbar n X^{n-1}$ pour tout n entier strictement positif.
4.) Pour toute fonction f admettant un développement en série polynômial, montrez que $[f(X), P_X] = i\hbar f'(X)$.
5.) On considère une autre fonction g admettant un développement en série polynômial. Que vaut $[g(P_X), X]$?

Problème III : Théorème d'Ehrenfest

Soient $\mathbf{P}$ et $\mathbf{R}$ les vecteurs d'opérateurs quantiques *impulsion* et *position*. En utilisant

- le résultat du cours sur le lien entre variation temporelle de la moyenne quantique et commutation avec l'hamiltonien H,
- le probléme II ci-dessus,

calculez $\frac{d}{dt}\langle\mathbf{R}\rangle$ ainsi que $\frac{d}{dt}\langle\mathbf{P}\rangle$. Interprétez.

Problème IV : Oscillations quantiques cohérentes

Le modèle ci-dessous est utilisé pour décrire des oscillations entre deux niveaux quantiques couplés. Il pourrait notamment permettre (entre autres) de décrire les oscillations du neutrino entre les états 'neutrino d'électron' = $|1\rangle$ et 'neutrino de muon'=$|2\rangle$.

On considère un système vivant dans un espace d'états de dimension deux, dont les vecteurs de base orthonormés s'écrivent

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La forme générale d'un état normé de cet espace s'écrit donc

$$|\psi(t)\rangle = a(t)\,|1\rangle + b(t)\,|2\rangle,$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On suppose que l'Hamiltonien s'écrit dans cette base

$$H = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix},$$

avec h et g des constantes réelles.

1.) Ecrire l'équation de Schrődinger dépendente du temps sous forme matricielle pour l'état $|\psi\rangle$.

2.) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres (normés) de la matrice H, que l'on notera $|+\rangle$ et $|-\rangle$.

3.) Supposons qu'à $t = 0$ l'état du système est $|1\rangle$. Que vaut $|\psi(t)\rangle$?

4.) En déduire la probabilité $P_1(t)$ de trouver le système dans l'état $|1\rangle$ à l'instant t.

5.) Quelle est l'énergie moyenne du système ?

6.) Proposez un protocole pour préparer ce système dans l'état $|2\rangle$ avec certitude.