TD2 de Physique Quantique (et Statistique)

PHELMA IPhy 2A

I : Niveaux de Landau

Notations: a désigne un scalaire, réel ou complexe, $\hat{a}$ désigne un opérateur de l'espace des fonctions d'onde, $\mathbf{a}$ désigne un vecteur de scalaires, et $\hat{\mathbf{a}}$ désigne un vecteur dont chaque composante est un opérateur.

On se propose de déterminer les niveaux d'énergie d'un électron confiné dans le plan (Oxy) et plongé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à ce plan, $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$. On admet que l'Hamiltonien de l'électron s'écrit

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}})^2.$$

Ici, $\mathbf{A}$ est le vecteur potentiel du champ électromagnétique, qui vérifie

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{B}.$$

1.) Démontrer que l'on peut choisir $\hat{\mathbf{A}} = -B\,\hat{y}\,\mathbf{e}_x$ (jauge de Landau).

2.) Expliciter la forme générale de l'Hamiltonien en fonction des opérateurs $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$. Avec quels deux de ces six opérateurs l'Hamiltonien commute-t-il ?

3.) On considère $\psi(x, y, z)$, solution de l'équation de Schrődinger stationnaire

$$\hat{H}\psi(x, y, z) = E\,\psi(x, y, z).$$

Justifiez que l'on peut choisir $\mid \psi\rangle$ également état propre de $\hat{p}_x$ et $\hat{p}_z$. Etant donné le confinement de l'électron dans le plan (Oxy), que vaut $\hat{p}_z \mid \psi\rangle$?

4.) En déduire qu'on peut écrire $\psi(x, y, z) = e^{ixp_x/\hbar}\,\phi(y)$ avec p_x un nombre réel. Quelle est l'équation différentielle obéie par ϕ ?

5.) On pose $\omega_B = \frac{qB}{m}$, on fait le changement de variable $\hat{u} = \hat{y} + \frac{p_x}{qB}$ et on considère ξ définie par $\xi(u) = \phi(y)$. Exprimer l'opérateur $\hat{p}_u$ en fonction de $\hat{p}_y$. Montrez que ξ obéit à

$$E\,\xi(u) = \left(\frac{\hat{p}_u^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_B^2\hat{u}^2\right)\xi(u).$$

6.) Justifiez qu'on est ramenés à l'étude d'un oscillateur harmonique 1D. En vous appuyant sur l'expression connue (bien que non démontrée en cours) des niveaux d'énergie de celui-ci, concluez quant aux valeurs propres de $\hat{H}$.

7.) Avec des arguments qualitatifs, identifiez une échelle spatiale caractéristique λ_B du problème. En pavant la surface totale L^2 de l'échantillon avec des orbites circulaires de rayon λ_B, montrez que pour un champ appliqué donné, la dégénérescence de chaque état propre est

$$g = \frac{qBL^2}{\pi\hbar}.$$

II : Diamagnétisme de Landau (Physique statistique)

On note les valeurs propres de $\hat{H}$ sous la forme

$$\epsilon_n = 2\mu_B B(n + 1/2),$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ est le magnéton de Bohr. On rappelle que chaque niveau d'énergie ϵ_n est dégénéré g fois. (on notera par l'indice l un état microscopique, et par l'indice n un niveau d'énergie).

Nous allons dans la suite étudier les propriétés diamagnétiques d'un ensemble de N électrons à l'équilibre thermique remplissant ces différents niveaux de Landau. Ces électrons sont traités comme des fermions indépendants ; la température T et le potentiel chimique μ sont imposés. On pose $\beta = 1/k_B T$.

1.) a.) Ecrire l'expression de la grande fonction de partition ζ_l d'un état microscopique d'énergie ϵ_n dans ce système.

b.) La grande fonction de partition ζ_G du gaz d'électrons est définie par

$$\zeta_G = \prod_l \zeta_l.$$

Ecrire ζ_G comme un produit sur l'indice n.

c.) On définit le grand *potentiel* canonique par

$$\Phi(\mu, T, B) = -k_B T \ln(\zeta_G).$$

Ecrire l'expression de Φ en fonction de β, g et d'une série infinie sur n que l'on ne cherchera pas à calculer.

d.) Calculer la quantité $-\partial\Phi/\partial\mu$ et déduisez-en qu'elle est égale à N. En déduire l'expression formelle (en fonction de Φ) de la densité d'électrons par unité de surface, $\rho = N/L^2$.

2.) La susceptibilité magnétique par unité de surface est donnée par

$$\chi = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial B^2}\Big|_{B=0,\mu,T}$$

a.) A haute température et pour des valeurs fixées de N et B, le coéfficient $\alpha = e^{\beta\mu}$ est petit devant 1. Calculer Φ en ne retenant que les termes de plus bas degré en α (on veillera à remplacer g par sa valeur explicite).

b.) Développer ce résultat en utilisant pour $|x| \ll 1$

$$\sinh(x) \approx x + \frac{1}{6}x^3.$$

En déduire une expression de la susceptibilité magnétique à cette approximation.

c.) Exprimer aussi ρ à partir de l'expression de Φ ci-dessus dans la limite $B \to 0$. Donner le résultat final de χ en fonction de ρ, T et des constantes de la nature e, m, k_B et $\hbar$ seulement.

d.) (bonus) Commentez le signe de χ. Comment appelle-t-on une loi du type $\chi(T) \propto 1/T$?

Adapté d'après R. Balian, Du microscopique au macroscopique, Ellipses, pp. 613.