TD3 physique quantique et statistique

PHELMA PNS 2A

Moment quadrupolaire électrique

On se propose d'étudier un système de moment cinétique $l = 1$, dont l'espace d'états admet comme base canonique $\mathcal{C}$ la famille des trois vecteurs propres orthonormés de L_z :
$(\mid +1\rangle, \mid 0\rangle, \mid -1\rangle)$, de valeurs propres respectives $+\hbar, 0, -\hbar$.
On définit par ailleurs les opérateurs L_+ et L_- par

$$L_\pm = L_x \pm iL_y,$$

qui vérifient (cf. cours)

$$L_\pm \mid m\rangle = \hbar\sqrt{2} \mid m \pm 1\rangle$$

$$L_+ \mid +1\rangle = L_- \mid -1\rangle = 0.$$

Ce système possède un quadrupole électrique et lorsqu'il est plongé dans un gradient de champ électrique, son Hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{\omega_0}{\hbar}(L_u^2 - L_v^2),$$

où $L_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + L_z)$ et $L_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x - L_z)$ sont les composantes de $\mathbf{L}$ sur les deux directions Ou et Ov du plan xOz, à ± 45 degrés de Ox et Oz ; ω_0 est une constante réelle et positive.

1.) Ecrire L_+ et L_- sous forme matricielle dans la base canonique $\mathcal{C}$.

2.) Ecrire l'action de H sur chacun des trois vecteurs de $\mathcal{C}$. En déduire la représentation matricielle de H dans cette base.

3.) Montrer que le trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux et vecteurs propres de H. Trouver les valeurs propres et les préfacteurs de normalisation associés. Ecrire l'expression matricielle de H dans cette nouvelle base orthonormée $\mathcal{C}' = (\mid E_1\rangle, \mid E_2\rangle, \mid E_3\rangle)$, base que l'on ordonnera par énergies décroissantes.

4.) A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état

$$\mid \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid +1\rangle - \mid -1\rangle).$$

Ecrire l'expression du vecteur d'état $\mid \psi(t)\rangle$ à l'instant $t > 0$.

5.) Y a-t-il des instants auxquels l'issue de la mesure de L_z est certaine ?

Adapté d'après C. Cohen-Tannoudji et al., Mécanique Quantique, Hermann, p. 778.