TD4 physique quantique et statistique

PHELMA PNS 2A

Magnons

On considère un système quantique de spins 1/2, espacés régulièrement et fixes dans l'espace. Dans les parties I et II, nous allons étudier une chaîne unidimensionnelle (1D). La partie III (qui peut être résolue indépendamment de I et II) approfondira des propriétés thermodynamiques tridimensionnelles. Les symboles gras représentent des vecteurs.

I Etat fondamental d'un ferromagnétique

On considère une chaîne linéaire 1D de N spins 1/2, régulièrement espacés de a. Cette chaîne est plongée dans un champ magnétique uniforme selon z et de norme B. L'hamiltonien fréquemment utilisé pour modéliser ce type de système est l'hamiltonien de Heisenberg

$$H = -g\mu_B B \sum_{q=1}^{N} S_q^z - J \sum_{q=1}^{N} \mathbf{S_q}.\mathbf{S_{q+1}},$$

où $\mathbf{S_q}$ est l'opérateur moment cinétique de spin du site $q = 1, ..., N$ de la chaîne (et n'agit donc pas sur l'état des autres sites). Le facteur g, le magnéton de Bohr μ_B et l'énergie d'échange ferromagnétique J sont tous des constantes > 0.

Le premier des deux termes de H décrit l'interaction paramagnétique avec le champ magnétique appliqué. Le second terme de H modélise l'interaction ferromagnétique entre deux spins *premiers voisins*, comme si chaque spin créait un champ local ressenti uniquement par ses voisins immédiats. Pour ne pas avoir à considérer le cas particulier des sites aux bords de la chaîne, nous la bouclons sur elle-même de manière que $N + 1 \equiv 1$. Le site $q = N$ a donc pour premiers voisins $N - 1$ et 1.

Pour chaque site q, on note $|+\rangle_q$ et $|-\rangle_q$ les vecteurs propres normés de S_q^z, de valeurs propres $\pm 1/2$ respectivement (on prend $\hbar = 1$ dans tout le problème).

On rappelle que

$$S_q^{\pm} = S_q^x \pm iS_q^y,$$

$$S_q^+|+\rangle_q = 0,\ S_q^-|-\rangle_q = 0,\ S_q^+|-\rangle_q = |+\rangle_q,\ S_q^-|+\rangle_q = |-\rangle_q.$$

1.1 Montrez que

$$\mathbf{S_q}.\mathbf{S_{q+1}} = S_q^z S_{q+1}^z + \frac{1}{2}(S_q^+ S_{q+1}^- + S_q^- S_{q+1}^+).$$

1.2 Notons $|0\rangle$ l'état du système dans lequel les N spins sont dans l'état $|+\rangle$. Montrer que $|0\rangle$ est un état propre de H, d'énergie $E_0 = -g\mu_B BN/2 - JN/4$. Nous admettrons que $|0\rangle$ est l'état fondamental du système.

II Ondes de spin

2.1 Considérons maintenant les états, notés $|q\rangle$, dans lesquels tous les spins de la chaîne sont $|+\rangle$, sauf le spin du site q qui est dans l'état $|-\rangle$. Ces états sont normés. Montrez que

$$H|q\rangle = (E_0 + g\mu_B B + J)\,|q\rangle - \frac{J}{2}(|q-1\rangle + |q+1\rangle).$$

2.2 Individuellement, chaque état $|q\rangle$ n'étant donc pas vecteur propre de H, nous cherchons alors à construire un état propre par des combinaisons linéaires des différents $|q\rangle$. On pose

$$|u_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=1}^{N} e^{ikqa} |q\rangle.$$

Montrez que $|u_k\rangle$ est normé.

2.3 Pour satisfaire aux conditions aux limites périodiques imposées par le bouclage de la chaîne, que doit valoir $e^{ik(N+1)a}$? Déduisez-en que les valeurs permises de k sont de la forme

$$k = \frac{2\pi}{Na} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Montrez que définir $|u_k\rangle$ en prenant n ou $n+N$ revient au même ; déduisez-en qu'on peut se restreindre à $-N/2 < n < N/2$.

Remarque : le développement ci-dessus en ondes de Bloch - modes collectifs que vous connaissez déjà des modes électroniques - a son origine dans le traitement des ondes de spin.

2.4 Montrez que $|u_k\rangle$ est vecteur propre de H, de valeur propre

$$E(k) = E_0 + g\mu_B B + J(1 - \cos(\mathrm{ka})).$$

Ecrivez cette relation de dispersion dans la limite $ka \ll 1$, c'est-à-dire pour les états de basse énergie, seuls à être peuplés de manière significative à basse température. Commentez.

2.5 Montrez que

$$S_z|u_k\rangle = (N/2 - 1)|u_k\rangle,$$

où S_z est la composante selon z du spin total, $S_z = \sum_{q=1}^{N} S_q^z$. Commentez.

2.6 Si le système est dans un état $|u_k\rangle$, montrez que $\forall q$, la probabilité de mesurer le site d'indice q dans l'état $|-\rangle_q$ vaut $1/N$.

2.7 (question difficile) Soit $\mathbf{S}_\mathbf{q}^\perp = \mathbf{S}_\mathbf{q} - S_q^z \mathbf{u_z}$ la composante perpendiculaire à l'axe Oz du spin. Montrez que

$$\langle u_k | \mathbf{S}_\mathbf{q}^\perp . \mathbf{S}_{\mathbf{q}'}^\perp | u_k \rangle = \frac{1}{N} \cos(k(q'-q)a).$$

III Propriétés thermodynamiques des magnons (complément hors programme)

Dans un cristal ferromagnétique réel (à trois dimensions) et en absence de champ magnétique les excitations de basse énergie (analogues aux ondes de spin en 1D) sont appelées magnons. Nous admettrons que les magnons

- forment un gaz parfait, donc sans interactions,
- sont - tout comme p.ex. es phonons - des bosons de spin nul et de potentiel chimique nul,
- sont caractérisés par un vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et une énergie $\varepsilon(k) = Ak^2$, où A est une constante positive.

3.1 Montrez à partir de la relation de dispersion ci-dessus que la densité d'états $\varrho(\varepsilon)$ des magnons varie $\propto \sqrt{\varepsilon}$.

3.2 Donnez l'expression de la moyenne statistique du nombre de magnons $\langle n \rangle$ à la température T. Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement les valeurs d'intégrales purement numériques, on se contentera de désigner leur valeur p. ex. par I dans l'expression de $\langle n \rangle$.

3.3 Comme vu pour les ondes de spin à la question 2.5, chaque magnon réduit le spin selon z de 1 par rapport à l'état fondamental. Déduisez-en la *loi de Bloch* qui décrit l'aimantation $M(T)$ d'un ferromagnétique à basse température

$$M(T) = M(0) \left[1 - \alpha T^{3/2} \right],$$

où α est une constante.

3.4 Calculez l'énergie du gaz de magnons à la température T et déduisez-en que la chaleur spécifique des spins d'un ferromagnétique varie en $T^{3/2}$ à basse température.

Sujet adapté d'après Diu et al., Physique Statistique, Hermann, pp. 942-944.