Examen de Physique Quantique I

Novembre 2017
Phelma PNS 2A / C. Winkelmann

Couplage entre un état stable et un état instable

Nous avons étudié en TD l'effet du couplage entre deux états quantiques et calculé les oscillations quantiques entre états. Nous allons maintenant supposer que l'un des deux états est instable : il peut se désintégrer spontanément.

1 Description phénoménologique d'un état instable

On considère un ensemble de vecteurs propres $\{|\varphi_n\rangle\}$ d'un Hamiltonien H_0, d'énergies respectives E_n. A priori, le temps de vie d'un état propre de H_0 est infini. Cependant, à y regarder de plus près, le couplage du système à son environnement (électromagnétique ou autre) induit des transitions possibles (émission d'un photon, radioactivité, effet tunnel, ...) qui rendent le temps de vie de ces états propres fini. L'instabilité d'un état $|\varphi_n\rangle$ peut se décrire en lui associant une durée de vie τ. Ainsi, si une particule est initialement dans l'état $|\varphi_n\rangle$, la probabilité de la trouver dans cet état à un instant t ultérieur sera

$$\mathcal{P}_n(t) = e^{-t/\tau}. \tag{1}$$

1.1

Soit $|\psi(0)\rangle = |\varphi_n\rangle$ et négligeons pour l'instant l'instabilité de ces états. Ecrivez l'expression de $|\psi(t)\rangle$ dans la base des états propres de H_0. Donnez $\mathcal{P}_n(t)$ dans de cas-là et commentez.

1.2

Pour décrire phénoménologiquement la durée de vie finie, on recourt alors à une réécriture de l'énergie, en lui ajoutant un terme imaginaire:

$$E'_n = E_n - i\hbar\frac{\gamma_n}{2}.$$

En remplacant E_n par E'_n dans l'expression de $|\psi(t)\rangle$ de la question précédente, écrivez $\mathcal{P}_n(t)$ dans ce cas. Reliez γ_n à τ, de manière à retrouver l'Eq. (1) et proposez une appelation pour le terme γ_n.

1.3

On se limite à l'étude du sous-espace engendré par deux vecteurs propres de H_0, notés $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$. On suppose que $|\varphi_1\rangle$ a un temps de vie fini τ et $|\varphi_2\rangle$ un temps de vie infini. Justifiez l'écriture matricielle phénoménologique de H_0 dans ce sous-espace

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 - i\hbar\frac{\gamma_1}{2} & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

On notera que H_0 n'est plus hermitien, car le nombre de particules et l'énergie ne sont pas conservées.

2 Couplage entre états

2.1

On applique désormais un terme d'énergie supplémentaire

$$W = \begin{pmatrix} 0 & g \\ g^* & 0 \end{pmatrix}$$

à ce sous-système, avec g un nombre complexe. Expliquez qualitativement l'effet de W sur le système.

2.2

On cherche les valeurs propres (complexes) ϵ_1' et ϵ_2' de $H = H_0 + W$. On se placera dans la limite de couplage faible, $|g| \ll |E_1' - E_2|$. Montrer que

$$\epsilon_1' \approx E_1 - i\hbar\frac{\gamma_1}{2} + \frac{|g|^2}{E_1 - E_2 - i\hbar\frac{\gamma_1}{2}},$$

$$\epsilon_2' \approx E_2 + \frac{|g|^2}{E_1 - E_2 - i\hbar\frac{\gamma_1}{2}}$$

Conseils : dans les calculs garder la notation E_1' plutôt que $E_1 - i\hbar\frac{\gamma_n}{2}$, sauf pour le résultat final ; remarquer aussi que $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$.

2.3

Justifiez que ϵ_2' peut s'écrire

$$\epsilon_2' = \Delta_2 - i\hbar\frac{\Gamma_2}{2},$$

avec Δ_2 et Γ_2 réels. Commentez la stabilité de l'état $|\varphi_2\rangle$ sous l'effet du couplage W.

3 Couplage entre deux états de même énergie

On suppose $E_1 = E_2$.

3.1

On écrit $H = \left(E_1 - i\hbar\frac{\gamma_1}{4}\right)\mathbf{I} + K$, où $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Donnez l'expression matricielle de K.

3.2

Justifiez que les deux valeurs propres de K, notées k_1 et k_2, sont opposées l'une de l'autre, sans expliciter l'expression de $k_1 = -k_2$.

3.3

Montrez que les vecteurs

$$|\psi_1'\rangle = g\,|\varphi_1\rangle + \left(k_1 + i\hbar\frac{\gamma_1}{4}\right)|\varphi_2\rangle,$$

$$|\psi_2'\rangle = g\,|\varphi_1\rangle + \left(-k_1 + i\hbar\frac{\gamma_1}{4}\right)|\varphi_2\rangle$$

sont vecteurs propres de K (et donc de H).

On pourra noter que ces deux vecteurs ne sont ni normés, ni orthogonaux, ce qui n'a pas d'importance ici. (L'existence d'une base de diagonalisation orthonormée n'est garantie que si H est hermitien, ce qui n'est pas le cas ici.)

3.4

On suppose $|\psi(0)\rangle = |\varphi_2\rangle$ (le système est initialement dans l'état stable). Toujours sans expliciter k_1, calculez $|\psi(t)\rangle$ et déduisez-en que la probabilité de trouver le système dans l'état $|\varphi_1\rangle$ à l'instant t s'écrit

$$\mathcal{P}_{21}(t) = \frac{|g|^2}{4|k_1|^2}\,e^{-\gamma_1 t/2}\left|e^{-ik_1 t/\hbar} - e^{ik_1 t/\hbar}\right|^2.$$

3.5

Nous allons désormais supposer $|g| > \hbar\frac{\gamma_1}{4}$. Interprétez qualitativement cette hypothèse. Qu'en déduit-on sur k_1 et k_2 ? Donnez les valeurs propres (complexes) ϵ_1' et ϵ_2' de $H = H_0 + W$.

3.6

Tracez l'allure de $\mathcal{P}_{21}(t)$ et commentez.