Examen de Physique Quantique I

25 Octobre 2021
Phelma IPhy 2A / C. Winkelmann

## Résonance magnétique d'un spin 1/2

**Notations et formules :**
- Pour un opérateur $A$, on définit l'exponentielle $e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$. On admettra que cette série peut se traiter comme une somme finie.
- Les quantités vectorielles seront notées en gras, p. ex. $\mathbf{A}$.
- On rappelle les identités trigonométriques :
$2\sin a\cos a = \sin 2a$.
$\sin^2 a = (1-\cos 2a)/2$
$1+\tan^2 a = 1/\cos^2 a$
- On rappelle les expressions des matrices de Pauli
$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, et $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On considère la dynamique de l'état quantique d'une particule d'opérateur de spin $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, de norme $1/2$, plongée dans un champ magnétique

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(t),$$

avec une composante statique $\mathbf{B}_0 = B_0\,\mathbf{u}_z$ et un champ tournant dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}_0$,

$$\mathbf{B}_1(t) = B_1(\cos\omega t\,\mathbf{u}_x + \sin\omega t\,\mathbf{u}_y).$$

L'hamiltonien du système est

$$H(t) = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}(t),$$

avec $\mathbf{M} = \gamma\,\mathbf{S}$, où $\gamma$ est une constante positive.

# 1 Equation de Schrödinger

## 1.1

On définit la base canonique, notée $\mathcal{C} = (|+\rangle, |-\rangle)$ comme la base propre de $H$ lorsque $B_1 = 0$. Donnez dans ce cas l'expression matricielle de de $H$ dans $\mathcal{C}$.

### 1.2

Dorénavant $B_1 \neq 0$. Montrez que l'hamiltonien peut s'écrire dans la base canonique sous la forme

$$H(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \, e^{-i\omega t} \\ \omega_1 \, e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix},$$

où on précisera les expressions de $\omega_0$ et $\omega_1$ (qui peuvent être des quantités négatives).

### 1.3

On note l'expression la plus générale de l'état quantique du spin sous la forme $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$. Explicitez le système d'équations différentielles obéies par les deux coefficients $(a_+(t), a_-(t))$.

## 2 Passage dans le référentiel tournant

### 2.1

On définit l'opérateur $R(t) = e^{i\omega t S_z/\hbar}$. Donnez son expression matricielle dans la base canonique.

### 2.2

On définit $|\tilde{\psi}(t)\rangle = R(t)|\psi(t)\rangle$. Montrez que ce vecteur peut s'écrire $|\tilde{\psi}(t)\rangle = b_+(t)|+\rangle + b_-(t)|-\rangle$, où on donnera les expressions des deux coefficients $(b_+(t), b_-(t))$.

### 2.3

Injectez la relation ci-dessus dans le système d'équations de la question 1.3 pour trouver le système d'équations différentielles obéis par $(b_+(t), b_-(t))$.

### 2.4

Déduisez-en que $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ obéit à l'équation

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}(t)\rangle,$$

où

$$\tilde{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix}$$

est désormais un opérateur indépendant du temps dont on donnera l'expression matricielle. On donnera l'expression du paramètre $\Delta\omega$.

### 2.5

Commentez la transformation du problème qui vient d'être effectuée.

## 3 Oscillations de Rabi

### 3.1

Trouvez les valeurs propres de $\tilde{H}$, notées $E_\pm = \pm\hbar\Omega/2$. Donner l'expression de $\Omega$.

### 3.2

Factorisez $\tilde{H}$ par $-\Delta\omega$, puis introduisez l'angle $\theta \in [0, \pi[$ défini par $\tan(\theta) = -\omega_1/\Delta\omega$. Exprimez alors $E_\pm$ en fonction de $\Delta\omega$ et $\theta$.

### 3.3

Montrez que les vecteurs propres orthonormés de $\tilde{H}$ peuvent s'écrire sous la forme $|\psi_+\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)|-\rangle$ et $|\psi_-\rangle = -\sin(\theta/2)|+\rangle + \cos(\theta/2)|-\rangle$.

### 3.4

On suppose $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$. Après avoir déterminé $|\tilde{\psi}(0)\rangle$, explicitez $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ dans la base $(|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle)$. Déduisez-en l'expression de $b_-(t)$.

### 3.5

Calculez la probabilité, notée $\mathcal{P}_{+-}(t)$, de trouver la particule dans l'état de spin $|-\rangle$ à un instant ultérieur $t \geq 0$. Le résultat final sera exprimé seulement en fonction des paramètres $\omega_1$, $\Delta\omega$ et $\Omega$ (et sans l'angle $\theta$).

### 3.6

Tracez (qualitativement) $\mathcal{P}_{+-}(t)$ en fonction du temps pour $\Delta\omega = 0$, puis $\Delta\omega = 3\omega_1$. Commentez.

### 3.7

D'un point de vue expérimental, pour toute opération logique quantique, il est important d'être capable, en partant p. ex. d'un état initial donné $|+\rangle$, de préparer avec grande fidélité l'état $|-\rangle$. Discutez comment ajuster/choisir les paramètres expérimentaux pour cela.

# 4 Evolution de $\langle \mathrm{M} \rangle(t)$

## 4.1

On s'intéresse à la dynamique de la valeur moyenne du moment magnétique $\langle \mathbf{M} \rangle(t)$. Justifiez qu'elle est régie par une équation faisant intervenir $[M, H(t)]$

## 4.2

Calculez $[M_x, H(t)]$, puis déduisez-en l'expression de $[M_y, H(t)]$ et $[M_z, H(t)]$ par permutation circulaire. Donnez l'équation différentielle régissant la dynamique de $\langle \mathbf{M} \rangle(t)$. Commentez le lien entre cette expression et la dynamique classique de l'aimantation dans un champ magnétique.