

# Examen de Physique Quantique I

Phelma IPhy 2A – 10 Novembre 2022 – C. Winkelmann

Ce sujet porte sur deux parties indépendantes. Rappels de trigonométrie

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha), \quad \cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2.$$

## 1 Moyennes et fluctuations du moment cinétique

On considère les états propres orthonormés d'un opérateur quantique de moment cinétique  $\mathbf{J}$ , notés  $|j, m\rangle$ , de manière que  $J_z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle$  et  $\mathbf{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle$ .

### 1.1

Rappelez l'action des opérateurs  $J_{\pm}$  sur l'état  $|j, m\rangle$ , puis calculez les moyennes quantiques  $\langle J_i \rangle$  de chacune des trois composantes  $i = x, y, z$  du moment cinétique sur un tel état.

### 1.2

Calculez aussi les moyennes quantiques de  $\langle J_i^2 \rangle$  pour  $i = x, y, z$ .

### 1.3

On définit  $\Delta J_i = \sqrt{\langle (J_i - \langle J_i \rangle)^2 \rangle}$ . Calculez  $\Delta J_i \Delta J_j$  pour tous les couples  $i \neq j$ .

### 1.4

Ces résultats sont-ils compatibles avec la relation d'incertitude de Heisenberg entre deux observables  $A$  et  $B$ , dont on rappelle l'expression :  $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ .

### 1.5

En suivant la recette utilisée en cours pour construire les trois opérateurs matriciels  $J_i = S_i$  du moment cinétique de spin 1/2, trouvez l'expression des trois matrices  $J_i$  dont est constitué le moment cinétique de  $j = 1$ .

### 1.6

On considère désormais un spin 1/2, auquel cas il sera plus aisé de noter les vecteurs propres sous la forme  $\{|\pm\rangle\}$ . Montrez qu'on peut écrire l'état le plus général d'un spin 1/2 peut s'écrire sous la forme

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2}|-\rangle,$$

où  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

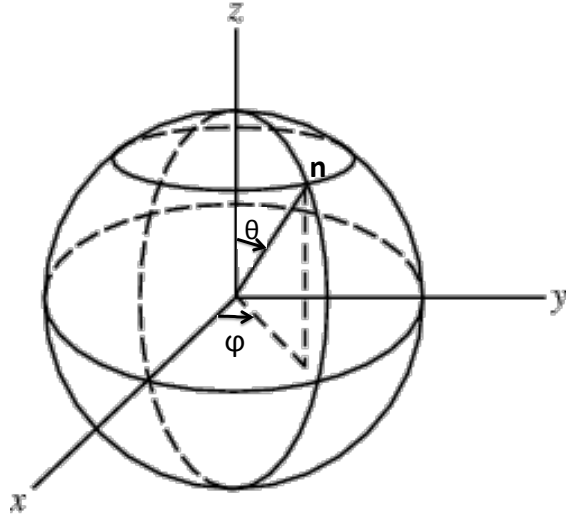


Figure 1: Sphère de Bloch

## 1.7

Il s'ensuit qu'on peut paramétrer de manière univoque  $|\psi\rangle$  par un vecteur réel tridimensionnel  $\mathbf{n}$ , de norme 1 et d'angles longitudinal et azimutal  $\theta$  et  $\varphi$ ,

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z.$$

Rappelez (ou retrouvez) l'expression matricielle des trois matrices de Pauli. Montrez que la moyenne quantique du spin dans l'état  $|\psi\rangle$  est  $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\hbar}{2} \mathbf{n}$ . Interprétez ce résultat. On appelle  $\mathbf{n}$  le vecteur de Bloch de l'état  $|\psi\rangle$ .

## 1.8

Représentez sur la sphère de Bloch les états suivants :  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$ .

## 2 Effet Josephson

On considère un nombre  $N \gg 1$  de particules dans un même état quantique, d'extension macroscopique, qui forme alors un condensat. Des exemples typiques sont la supraconductivité, la superfluidité et les condensats de Bose-Einstein dans les atomes froids. Dans le cas de la supraconductivité, ces particules sont en réalité des paires d'électrons, appelées paires de Cooper.

Supposons alors deux condensats, initialement séparés, qui ont donc chacun sa fonction d'onde,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ . Dans le cas de la supraconductivité, que nous prendrons comme exemple par la suite, ces condensats sont localisés respectivement dans deux corps solides (appelés dorénavant *contacts*). Initialement, les deux fonctions d'onde n'ont donc pas de recouvrement. Ces deux fonctions d'onde sont alors des états stationnaires, d'énergies respectives  $E_i$ , données par le niveau de Fermi du contact. On écrit les deux fonctions d'onde sous la forme

$$\psi_i = \sqrt{N_i} e^{i\theta_i},$$

où  $N_i$  est le nombre de particules dans le condensat  $i$  et  $\theta_i$  sa phase quantique. On suppose que  $N_i$  et  $\theta_i$  sont uniformes sur chacun des deux contacts.

A un moment donné (temps initial) on rapproche les deux contacts, de manière à permettre un couplage tunnel paramétrisé par un coefficient complexe  $K$  : la fonction d'onde  $\psi_1$  acquiert un peu de  $\psi_2$  et vice versa. L'état quantique du système s'écrit alors

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

dans la base des états "être dans l'électrode 1" et "être dans l'électrode 2". Tant que ce couplage reste suffisamment faible l'Hamiltonien des deux contacts couplés peut donc s'écrire dans cette base

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & K \\ K & E_2 \end{pmatrix},$$

où  $K$  est une constante que l'on prend réelle.

## 2.1

Ecrire les deux équations différentielles couplant les deux fonctions  $\psi_i(t)$  (avec  $i = 1$  ou  $2$ ) et leurs dérivées temporelles.

## 2.2

La dépendance temporelle de  $\psi_i(t)$  peut être issue à la fois de celle de  $\sqrt{N_i}$  et de  $\theta_i$ . Ecrivez les deux équations différentielles temporelles du premier ordre reliant les fonctions  $\sqrt{N_i}$  et  $\theta_i$  à leurs dérivées temporelles.

## 2.3

On factorisera judicieusement les facteurs  $e^{i\theta_i}$  pour que chaque équation ne contienne plus qu'une seule exponentielle. On identifiera ensuite les parties réelles et imaginaires de chacune des deux équations, ce qui conduit in fine à quatre équations différentielles. Montrez ainsi que

$$\dot{N}_1 = -\dot{N}_2 = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{N_1 N_2} \sin(\theta),$$

avec  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  la différence de la phase quantique à travers la jonction.

## 2.4

Interprétez physiquement le fait que  $\dot{N}_1 + \dot{N}_2 = 0$ .

## 2.5

On suppose les deux contacts identiques, ce qui implique que initialement  $N_1 = N_2 \equiv N_0$  et on peut donc écrire  $N_i(t) = N_0 + \delta N_i(t)$ . Trouvez une relation entre les deux  $\delta N_i(t)$ . Nous allons faire l'approximation que  $\delta N_i(t) \ll N_0$  à tout instant, ce qui veut dire concrètement que le fait de coupler les deux contacts va seulement perturber faiblement les deux fonctions d'onde respectives. Montrez ainsi qu'au premier ordre en  $\delta N_1(t), \sqrt{N_1 N_2}$  est constante au cours du temps.

## 2.6

La fonction  $N_i$  est une densité de probabilité de présence des particules décrites par la fonction d'onde sur un contact donné. Si par exemple  $N_1$  décroît au profit de  $N_2$ , c'est qu'il y a un écoulement entre les deux contacts. On définit le courant de charge de 1 vers 2 comme  $I = q\dot{N}_2 = -q\dot{N}_1$ , avec  $q$  la charge électrique de la particule décrite par les fonctions d'onde en question. Démontrez la première relation de Josephson

$$I = I_c \sin \theta,$$

avec  $I_c$  une constante que l'on déterminera.

## 2.7

Revenez aux quatre équations trouvées dans la question 2.3 pour montrer que

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{E_1}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{N_2}{N_1}} \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

ainsi que l'équation analogue pour  $\dot{\theta}_2$ .

## 2.8

Une tension  $V$  appliquée entre les deux contacts implique un décalage des énergies des deux condensats de manière que  $E_1 - E_2 = -qV$ , où  $q$  est la charge des particules qui forment le condensat. Sachant que  $|K| \ll E_i$  et  $|\delta N_i| \ll N_0$ , faites des approximations dans ces équations pour en déduire la deuxième relation de Josephson

$$\dot{\theta} = \frac{2eV}{\hbar},$$

où  $e$  est la charge élémentaire.

## 2.9

On suppose que la jonction tunnel entre les deux contacts est traversée par un courant électrique  $I$  constant imposé. A partir des deux relations de Josephson obtenues, décrivez comment se comportent  $\theta$  et  $V$  pour un  $|I| < I_c$  donné. Commentez. Eventuellement, imaginez ce qui pourrait se passer lorsque le courant appliqué dépasse  $I_c$ .

*La description de la relation entre courant, tension et phase aux bornes d'une jonction tunnel entre deux supraconducteurs par B. Josephson (Phys. Lett. 1, 251 (1962)) a été récompensée par le prix Nobel en 1973.*