Electrodynamique en cavité dans la limite de couplage unitaire, première approche

Rapport de stage efféctué à l'Institut Néel sous la direction de Serge Florens,

Magistère de physique première année - Univsersité Joseph Fourier

Thomas Bédécarrats

29 août 2013

Sommaire

1 Introduction **2**

2 Système et Hamiltonien **3**
2.1 Espace de Hilbert . . . 3
2.1.1 Espace du spring . . . 3
2.1.2 Espace du spin . . . 5
2.1.3 Espace total . . . 5
2.2 Hamiltonien du système . . . 6
2.2.1 Énonciation de l'Hamiltonien . . . 6
2.2.2 Chaînes de parité $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ . . . 7

3 Étude du sytème **8**
3.1 Conditions de simulations . . . 8
3.2 Étude Statique . . . 8
3.2.1 Spectre Énergétique . . . 8
3.2.2 États propres en représentaion 'x' . . . 9
3.3 Étude dynamique . . . 10
3.3.1 Couplage 'unitaire' : g=1 . . . 11
3.3.2 Espace des phases et Distribution de Wigner . . . 15

4 Conclusion **17**

5 Bilbliographie **18**

A Quantification de l'Hamiltonien **19**
A.1 Equation de Maxwell, potentiels vecteur et scalaire . . . 19
A.1.1 Équation de Maxwell . . . 19
A.1.2 Potentiels vecteur et scalaire . . . 19
A.1.3 Nouvelle expression de H . . . 20
A.2 Contribution du champ électrique longitudinal . . . 20
A.3 Quantification du champ transverse . . . 21
A.4 Contribution de la particule . . . 21
A.4.1 Changement de jauge et quantification . . . 22
A.5 Quantification de P et R . . . 23

B Fonction de Wigner **24**
B.1 Opérateur déplacement . . . 24
B.2 Fonction caractéristique symétrique . . . 24
B.3 Fonction caractéristique normale . . . 24
B.4 Distribution de Wigner . . . 25

Chapitre 1

Introduction

Depuis le XXième siècle, il est connu que la lumière et la matière sont étroitement liées par les processus d'émission et d'absorption de photons lors de transitions électroniques atomiques. Ces processus témoignent des transferts énergétiques entre le champ électromagnétique et le nuage électronique gravitant autour du noyau.

Le formalisme de la mécanique quantique offre un cadre théorique et prédictif à ces phénomènes. Ainsi, en 1963, Edwin Jaynes et Fred Cummings, ont proposé un modèle appelé 'Quantum Electrodynamic Rabi Model' (QERM) capable de décrire un système composé d'un atome à deux niveaux énergétiques et d'un champ électromagnétique quantifié.

Ce modèle montre que le système se comporte comme un ensemble d'oscillateurs quantiques couplés à un 'spin'. L'intensité du couplage permet de définir différents régimes pour lesquels certaines approximations mathématiques sont possibles. Dans le cas d'interactions photons-matière pour lesquelles le modèle fut élaboré, ce couplage est faible, et l'approximation effectuée, appelées RWA (Rotating Wave Approximation), permet d'établir le modèle de Jaynes-Cummings, dont la résolution analytique est possible. Ce dernier a été largement étudié et exploité, notamment par les expériences menées par Serge Haroche à l'ENS et pour lesquelles il a obtenu le prix Nobel en 2012.

Cependant, certains phénomènes observés dans d'autres champs de la physique (matière condensée) sont également décrits par le QERM et permettent d'envisager des régimes de couplage plus intenses pour lesquelles la RWA n'est plus possible. Ces systèmes font par exemple intervenir des dispositifs mésoscopiques à deux niveaux couplés à des photons ou des phonons. C'est ainsi que l'étude théorique de ces régimes à couplage fort trouve sa motivation.

L'objet d'étude du stage est un système simplifié constitué d'un unique oscillateur de fréquence ω couplé à un système a deux niveaux espacés énergétiquement par Δ. Le système est considéré proche de la résonance ($\omega \sim \Delta$) et la constante de couplage 'unitaire' ($g = \omega \equiv 1$). Il s'agira d'établir les équations qui modélisent le système et, à l'aide de calculs numériques efféctués sur MATLAB, d'en simuler la dynamique. La description des résultats permettra ensuite d'envisager des pistes de recherche pour tenter de caractériser cette dynamique par l'établissement d'approximations pertinentes notamment.

Chapitre 2

Système et Hamiltonien

Le système est composé d'un élément matériel à deux niveaux d'énergie, un 'spin', couplé à un oscillateur harmonique, appelé 'spring'. Il peut s'agir par exemple d'un atome dont seuls deux niveaux énergétiques lui sont accessibles, présent au sein d'une cavité dans laquelle ne peut se propager qu'un seul mode de rayonnement électromagnétique.

2.1 Espace de Hilbert

L'espace de Hilbert total $\mathcal{E}_{tot}$ est le produit tensoriel des espaces de Hilbert propres du 'spin' et du 'spring' :

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{spi} \otimes \mathcal{E}_{spr} \tag{2.1}$$

2.1.1 Espace du spring

Base et états de Fock

L'espace du 'spring' est un espace de Hilbert de dimension infinie. Une de ces bases $\mathcal{F}_{\mathcal{E}_{spr}}$ possible est constituée des états propres de l'Hamiltonien de 'spring', identifiés par le nombre quantique 'n' qui correspond au nombre de quantas d'énergie ω contenus dans l'oscillateur. Cette base est appelée *base de Fock*, et les états $|n\rangle$ qui la constituent les *états de Fock* :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}_{spr}} = \{|n\rangle\},\ n \in \mathbb{N}^+ \tag{2.2}$$

L'Hamiltonien de 'spring' est relié au nombre quantique n par, à une constante près :

$$H^{spr}|n\rangle = n\omega|n\rangle \tag{2.3}$$

Dans cette base, il est donc diagonal :

$$H^{spr} = \omega \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & +\infty \end{pmatrix} = \omega \hat{N} \tag{2.4}$$

L'opérateur $\hat{N}$ qui renvoie le nombre de quantas peuplant les états de Fock peut être exprimé en fonction des opérateurs création $\hat{a}^\dagger$ et annihilation $\hat{a}$:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \tag{2.5}$$

Ces deux opérateurs vérifient les propriétés de commutation suivantes :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -a, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \tag{2.6}$$

et sont reliés aux opérateurs sans dimension de la coordonnée généralisée '$\hat{X}$' et du moment conjugé '$\hat{P}$' de l'oscillateur harmonique par [1] :

1. en fonction des développement mathématique effectué, il convient d'utiliser un d'autres facteurs de proportionalité entre $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ et $(\hat{X}, \hat{X})$, comme c'est la cas dans l'annexe B

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \quad \text{et} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X}^\dagger - i\hat{P}^\dagger) \tag{2.7}$$

Il est important de noter ici que, lorsque les observables associés aux opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ sont des quantités réelles, ceux-ci sont Hermitiens et vérifient donc $\hat{X}^\dagger = \hat{X}$ et $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$.

Les noms de ces deux opérateurs trouvent leur justification lorsqu'on regarde comment ils agissent sur un état de Fock :

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad \text{et} \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{2.8}$$

On constate immédiatement que tout état de Fock $|n\rangle$ peut être exprimé en fonction de l'état de vide $|0\rangle$ et que l'opérateur annihilation $\hat{a}^\dagger$ appliqué à ce vide renvoie 0 :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \qquad \text{et} \qquad \hat{a}|0\rangle = 0 \tag{2.9}$$

États de Fock en représentation 'x'

Pour le suite, il est pertinent d'exprimer les états de Fock $|n\rangle$ dans une base de coordonnée 'x' que l'on puisse interpréter physiquement dans l'étude du problème. Dans le cas de photons polarisés linéairement selon une unique direction $\vec{u}_x$ dans une cavité, il s'agira de l'amplitude de probabilité du module du champ $\vec{E}$ le long de cette direction .

L'objet mathématique manipulé est alors une fonction d'onde $\psi(x)$ et les états de Fock $\psi_n(x)$ prennent pour expression dans cette représentation :

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2}\mathcal{H}_n(x) \tag{2.10}$$

où $\mathcal{H}_n(x)$ est le polynôme de Hermite d'ordre n défini par :

$$\mathcal{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{2.11}$$

Cette famille de polynômes admet les propriétés suivantes :

$$\mathcal{H}_n(x) = 2n\mathcal{H}_{n-1}(x) - 2(n-1)\mathcal{H}_{n-2}(x) \tag{2.12}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_m(x)\mathcal{H}_n(x)dx = 0 \quad si\ m \neq n \tag{2.13}$$

$$\mathcal{H}_n(-x) = (-1)^n\mathcal{H}_n(x) \tag{2.14}$$

Par l'expression (2.10), $\psi_n(x)$ hérite de la propriété de parité (2.14) de $\mathcal{H}_n(x)$:

$$\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x) \tag{2.15}$$

Les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ s'éxpriment dans cette comme :

$$\hat{X} = x \qquad \text{et} \qquad \hat{P} = -i\frac{d}{dx} \tag{2.16}$$

En couplant (2.9) et (2.16), on exprime $\psi_n(x)$ en fonction de $\psi_0(x)$:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n}}\left[x - \frac{d}{dx}\right]^n \psi_0(x), \qquad \psi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.17}$$

2.1.2 Espace du spin

Base 'canonique' $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

L'espace du 'spin' est un espace de Hilbert à deux dimensions, dont une des bases $\mathcal{B}_{\mathcal{E}_{spi}}$ possibles est constituée des états propres de l'Hamiltonien de 'spin' :

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}_{spi}} = \{|e\rangle, |g\rangle\} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}^{2} \tag{2.18}$$

avec :

$$\hat{H}^{spi}|\uparrow\rangle = E_{\uparrow}|\uparrow\rangle \tag{2.19}$$
$$\hat{H}^{spi}|\downarrow\rangle = E_{\downarrow}|\downarrow\rangle \tag{2.20}$$

Dans cette base, l'Hamiltonien est diagonal :

$$\hat{H}^{spi}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{pmatrix} = \frac{\Delta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{K}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{K}{2}\hat{\mathbb{I}} \tag{2.21}$$

où $\Delta = E_{\uparrow} - E_{\downarrow}$ et $K = E_{\uparrow} + E_{\downarrow}$. Après un changement de l'origines des énergies, on a simplement :

$$\hat{H}^{spi}_{\mathcal{B}} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z \tag{2.22}$$

avec :

$$\hat{H}^{spi}_{\mathcal{B}}|\uparrow\rangle = \frac{\Delta}{2}|\uparrow\rangle \quad \text{et} \quad \hat{H}^{spi}_{\mathcal{B}}|\downarrow\rangle = -\frac{\Delta}{2}|\downarrow\rangle \tag{2.23}$$

Cette base a un sens physique accessible car elle est directement liée à l'état énergétique de la matière. La base totale produit de la base de Fock $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{B}$ se nommera *base canonique* et sera notée $\mathcal{B}_{can}$.

Base 'dipolaire' $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

Pour des raisons de symétrie comme nous le verrons plus loin, il est pertinent de considérer une nouvelle base $\mathcal{B}' = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ définie par :

$$|+\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad |-\rangle = \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2.24}$$

La matrice de passage de ce changement de base est :

$$\hat{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Et nous notons que les matrices de Pauli $\hat{\sigma}_z$ et $\hat{\sigma}_x$ deviennent :

$$\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}' \tag{2.26}$$
$$\hat{\sigma}_z \longrightarrow \hat{P}^{-1}\hat{\sigma}_z\hat{P} = \hat{\sigma}_x \tag{2.27}$$
$$\hat{\sigma}_x \longrightarrow \hat{P}^{-1}\hat{\sigma}_x\hat{P} = \hat{\sigma}_z \tag{2.28}$$

Dans l'exemple de l'atome en cavité, les états $|\pm\rangle$ correspondent à la direction du dipôle formé par les charges positive et négative. La base totale produit de $\mathcal{F}$ et de $|\pm\rangle$ est donc appelée *base dipolaire* et sera notée $\mathcal{B}_{dip}$.

2.1.3 Espace total

le ket $|\Psi\rangle$

Les bases $\mathcal{B}_{can}$ et $\mathcal{B}_{dip}$ permettent d'écrire tout état $|\Psi\rangle$ du système comme :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(c_{\uparrow,n}|\uparrow,n\rangle + c_{\downarrow,n}|\downarrow,n\rangle\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(c_{+,n}|+,n\rangle + c_{-,n}|-,n\rangle\Big) \quad c_{\cdot,i} \in \mathbb{C} \tag{2.29}$$

où les coefficient $c_{\cdot,i}$, de par l'orthogonalité des états de base et la condition de normalisation $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, vérifient :

2. 'e' pour *excited*, 'g' pour *ground*, équivalent à '$\uparrow$' pour *up* et '$\downarrow$' pour *down*.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(|c_{\uparrow,n}|^2+|c_{\downarrow,n}|^2\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(|c_{+,n}|^2+|c_{-,n}|^2\right)=1 \tag{2.30}$$

De plus, par (2.24), les $c_{.,i}$ satisfont :

$$\begin{cases} c_{\uparrow,i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_{+,i}+c_{-,i}) \\ c_{\downarrow,i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_{+,i}-c_{-,i}) \end{cases} \iff \begin{cases} c_{+,i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_{\uparrow,i}+c_{\downarrow,i}) \\ c_{-,i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_{\uparrow,i}-c_{\downarrow,i}) \end{cases} \tag{2.31}$$

En représentation 'x'

, un état $|\Psi\rangle$ s'écrit en base $\mathcal{B}_{can}$:

$$\begin{aligned} \langle x|\Psi\rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty}(c_{\uparrow,n}|\uparrow\rangle+c_{\downarrow,n}|\downarrow\rangle)\psi_n(x) \\ &= \psi_\uparrow(x)|\uparrow\rangle+\psi_\downarrow(x)|\downarrow\rangle \end{aligned} \tag{2.32}$$

et en base $\mathcal{B}_{dip}$:

$$\begin{aligned} \langle x|\Psi\rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty}(c_{+,n}|+\rangle+c_{-,n}|-\rangle)\psi_n(x) \\ &= \psi_+(x)|+\rangle+\psi_-(x)|-\rangle \end{aligned} \tag{2.33}$$

Les relations (2.31) donnent pour les fonctions $\psi_.(x)$:

$$\begin{cases} \psi_\uparrow(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_+(x)+\psi_-(x)] \\ \psi_\downarrow(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_+(x)-\psi_-(x)] \end{cases} \iff \begin{cases} \psi_+(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_\uparrow(x)+\psi_\downarrow(x)] \\ \psi_-(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_\uparrow(x)-\psi_\downarrow(x)] \end{cases} \tag{2.34}$$

2.2 Hamiltonien du système

2.2.1 Énonciation de l'Hamiltonien

L'Hamiltonien d'un système composé d'un 'spin' et d'un 'spring' en interaction a été proposé par Jaynes et Cummings et sera noté H^{JC}. Il s'écrit dans chacune des bases $\mathcal{B}_{can}$ et $\mathcal{B}_{dip}$:

$$\begin{aligned} H^{JC} &= H^{spi}+H^{int}+H^{spr} \\ &\overset{can}{=} \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z+\frac{g}{2}\hat{\sigma}_x(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)+\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &\overset{dip}{=} \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_x+\frac{g}{2}\hat{\sigma}_z(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)+\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Où $H^{int}=\frac{g}{2}\hat{\sigma}_{z,x}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$ est l'Hamiltonien d'interaction. Les developpements menant à un tel Hamiltonien sont expilcités en annexe A de ce document, pour le cas d'un atome couplé à un champ électromagnétique en cavité.

Afin d'expliciter les éléments de matrice H^{JC} en base $\mathcal{B}_{can}$, appliquons cet Hamiltonien aux états $|\uparrow,n\rangle$ et $|\downarrow,n\rangle$:

$$\begin{aligned} H^{JC}_{\mathcal{B}}|\uparrow,n\rangle &= (\frac{\Delta}{2}+n\omega)|\uparrow,n\rangle+\frac{\sqrt{n}}{2}g|\downarrow,n\text{-}1\rangle+\frac{\sqrt{n+1}}{2}g|\downarrow,n+1\rangle \\ H^{JC}_{\mathcal{B}}|\downarrow,n\rangle &= (\text{-}\frac{\Delta}{2}+n\omega)|\downarrow,n\rangle+\frac{\sqrt{n}}{2}g|\uparrow,n\text{-}1\rangle+\frac{\sqrt{n+1}}{2}g|\uparrow,n+1\rangle \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ce qui s'écrit d'un point du vue matriciel :

$$
\begin{array}{c}
 \\ |\uparrow,n\text{-}1\rangle \\ |\downarrow,n\text{-}1\rangle \\ |\uparrow,n\rangle \\ |\downarrow,n\rangle \\ |\uparrow,n+1\rangle \\ |\downarrow,n+1\rangle
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} |\uparrow,n\rangle & |\downarrow,n\rangle \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \frac{\sqrt{n}}{2}g \\
\frac{\sqrt{n}}{2}g & 0 \\
\frac{\Delta}{2}+n\omega & 0 \\
0 & -\frac{\Delta}{2}+n\omega \\
0 & \frac{\sqrt{n+1}}{2}g \\
\frac{\sqrt{n+1}}{2}g & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{2.37}
$$

En regardant la restriction à $|\uparrow\downarrow,n+m\rangle$ de $H^{JC}|\uparrow\downarrow,n+m\rangle$, où $m\in\{-1,0,1\}$, et en réarrangeant pertinemment les lignes et les colonnes, on constate que l'Hamiltonien est tri-diagonal par bloc :

$$
\begin{array}{c}
 \\ |\uparrow,n\text{-}1\rangle \\ |\downarrow,n\rangle \\ |\uparrow,n\text{+}1\rangle \\ |\downarrow,n\text{-}1\rangle \\ |\uparrow,n\rangle \\ |\downarrow,n\text{+}1\rangle
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} |\uparrow,n\text{-}1\rangle & |\downarrow,n\rangle & |\uparrow,n\text{+}1\rangle & |\downarrow,n\text{-}1\rangle & |\uparrow,n\rangle & |\downarrow,n\text{+}1\rangle \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\frac{\Delta}{2}\text{+}(n\text{-}1)\omega & \frac{\sqrt{n}}{2}g & 0 & & & \\
\frac{\sqrt{n}}{2}g & \text{-}\frac{\Delta}{2}\text{+}n\omega & \frac{\sqrt{n+1}}{2}g & & 0 & \\
0 & \frac{\sqrt{n+1}}{2}g & \text{-}\frac{\Delta}{2}+(n\text{+}1)\omega & & & \\
 & & & \text{-}\frac{\Delta}{2}\text{+}(n\text{-}1)\omega & \frac{\sqrt{n}}{2}g & 0 \\
 & 0 & & \frac{\sqrt{n}}{2}g & \frac{\Delta}{2}\text{+}n\omega & \frac{\sqrt{n+1}}{2}g \\
 & & & 0 & \frac{\sqrt{n+1}}{2}g & \text{-}\frac{\Delta}{2}+(n\text{+}1)\omega
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{2.38}
$$

2.2.2 Chaînes de parité $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$

L'évolution temporelle du système régie par l'équation de Schrödinger :

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \quad \leftrightarrow \quad |\psi\rangle(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi\rangle(0) \tag{2.39}
$$

permet alors de définir deux *chaînes d'états* $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ indépendantes au cours du temps qui séparent l'espace de Hilbert en deux :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^+ &: |\uparrow,0\rangle \leftrightarrow |\downarrow,1\rangle \leftrightarrow |\uparrow,2\rangle \leftrightarrow |\downarrow,3\rangle \leftrightarrow \dots \\
\mathcal{P}^- &: |\downarrow,0\rangle \leftrightarrow |\uparrow,1\rangle \leftrightarrow |\downarrow,2\rangle \leftrightarrow |\uparrow,3\rangle \leftrightarrow \dots
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

On constate que dans chacune des chaînes, les états $\uparrow$ ou $\downarrow$ sont systématiquement couplés aux états de Fock pairs ou impairs. Ainsi, un état $|\Psi\rangle$ appartenant à la chaîne $\mathcal{P}^+$ peut être décomposé comme suit :

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{\mathcal{P}^+} &\overset{can}{=} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}|2k\rangle\right)|\uparrow\rangle + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k+1}|2k+1\rangle\right)|\downarrow\rangle \\
&\overset{dip}{=} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}|2k\rangle + c_{2k+1}|2k+1\rangle\right)|+\rangle + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}|2k\rangle - c_{2k+1}|2k+1\rangle\right)|-\rangle
\end{aligned}
$$

Ce qui donne en réprésentation 'x' :

$$
|\Psi\rangle_{\mathcal{P}^+} \overset{dip}{=} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}\psi_{2k}(x) + c_{2k+1}\psi_{2k+1}(x)\right)|+\rangle + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}\psi_{2k}(x) + c_{2k+1}\psi_{2k+1}(x)\right)|-\rangle \tag{2.41}
$$

Dès lors, en reprenant la notation (2.33) et la propriété de parité (2.15), l'équation (2.41) nous permet d'écrire :

$$
\Psi^+_{\mathcal{P}^+}(-x) = \Psi^-_{\mathcal{P}^+}(x) \tag{2.42}
$$

Le même raisonnement appliqué à un état appartenant à la chaîne $\mathcal{P}^-$ donne :

$$
\Psi^+_{\mathcal{P}^-}(-x) = -\Psi^-_{\mathcal{P}^-}(x) \tag{2.43}
$$

Ces deux dernières propriétés seront très utiles dans l'étude du système. En préparant un état appartenant uniquement à l'une des chaînes, nous pourrons nous restreindre à observer $\Psi_+(x)$ ou $\Psi_-(x)$, pour décrire l'évolution du système dans son ensemble.

Chapitre 3

Étude du sytème

3.1 Conditions de simulations

Nous faisons ici une étude *proche de la résonance*, c'est-à-dire où la fréquence propre de la cavité ω est proche de l'intervalle énergétique séparant les niveaux $\uparrow$ et $\downarrow$ du 'spin'. Plus exactement, nous prenons :

$$\Delta = 0,8\ \omega. \tag{3.1}$$

Par ailleurs, afin de pouvoir effectuer les simulations numériques, nous tronquons l'espace de Hilbert infini du 'spring' en n'admettant que l'oscillateur ne peut contenir que 100 quantas [1] :

$$n_{max} = 100 \tag{3.2}$$

Cette troncation induit des erreurs sur les états et énergies propres lors de la diagonalisation numérique de l'Hamiltonien. Nous admettrons que ces erreurs sont négligeables dans la mesure où les états propres peuplés pendant les simulations *s'habillent* au maximum d'une vingtaine de quantas :

$$\langle n|\Psi\rangle(t) \ll 1,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n \geq 20 \tag{3.3}$$

Ces conditions sont satisfaites en majorant la constante de couplage g et le nombre de quantas n_0 présents à l'instant initial $t = 0$: $g \leq 10$ et $n_0 \leq 0$. Nous prendrons dans l'étude dynamique :

$$g = 1 \quad \text{et} \quad |\psi\rangle_{(t=0)} = |\downarrow, 0\rangle \tag{3.4}$$

Il serait nécessaire d'effectuer une étude mathématique, que nous ne ferons pas ici, afin de valider ces hypothèses. Nous avons simplement remarqué que, sous les conditions (3.3), doubler la taille du réservoir de quantas n'entraînait pas de changement perceptible dans les résultats des simulations aux échelles de temps considérées.

3.2 Étude Statique

3.2.1 Spectre Énergétique

Les états solutions de l'équation de Shrödinger indépendante du temps sont les états propres $|\psi_i\rangle$ de H^{JC} aux valeurs propres E_i :

$$\hat{H}^{JC}|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle \tag{3.5}$$

La FIGURE 3.1 présente le résultat des simulations numériques qui établissent le spectre énergétique du système en fonction du paramètre de couplage g.

Deux phénomènes significatifs sont observés :

1. cela corresepond à un maximum de 100 photons dans la cavité, dans l'exemple de l'atome en cavité

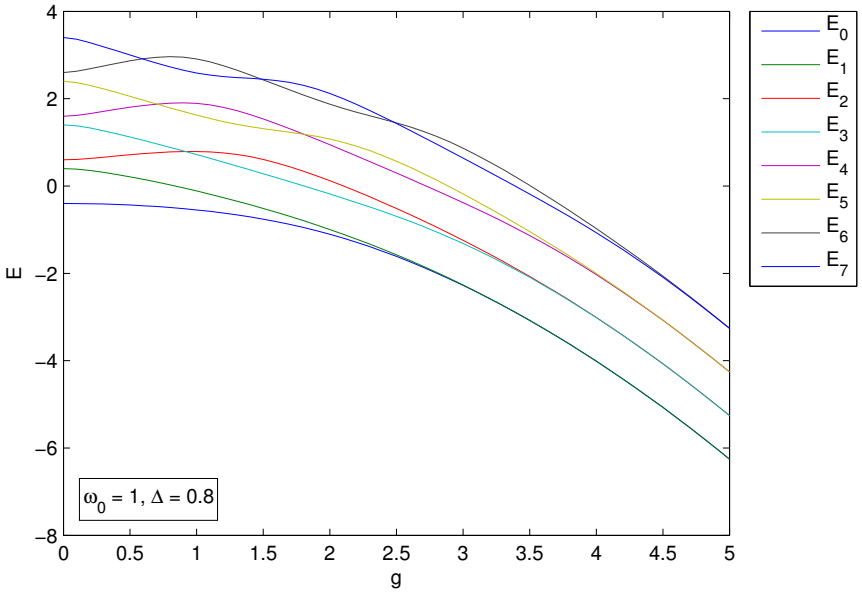

FIGURE 3.1 – 8 premières énergies propres en fonction du paramètre de couplage : $E_i = f(g)$

a) - Les niveaux se croisent deux à deux. Si l'on indexe les paires de niveaux $\{E_{2i}, E_{2i+1}\}$, on peut intuiter que les niveaux de la $i^{ème}$ paire se croisent i fois lorsque g décrit $\mathbb{R}^+$. Les états propres de chaque paire appartiennent chacun à l'un des deux secteurs de parité définis au §2.2.2 et leurs évolutions sont indépendentes au cours du temps. On dit qu'ils *ne se parlent pas* et leurs énergies peuvent se croiser. Au contraire, deux états $\{i, i \pm 2n\}$ appartiennent à la même chaîne et se repoussent afin de maintenir l'ordre de leurs niveaux énergétiques. C'est ce phénomène qui induit les courbures des tracés $E_i = f(g)$.

b) - À g grands, on observe une quasi-dégénerescence des états constitutifs des paires $\{E_{2i}, E_{2i+1}\}$. Chaque couple est alors séparé du suivant par le quanta ω de l'oscillateur harmonique libre. Lorsqu'on regarde l'Hamiltonien en *base dipolaire* (2.35) et que l'on substite $\hat{X}$ et $\hat{P}$ à $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ par les relations (2.7) :

$$H_{dip}^{JC} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_x + \frac{g}{2}\hat{\sigma}_z\hat{X} + \omega(\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \tag{3.6}$$

on constate que les composantes $|\pm\rangle\langle\pm|\psi\rangle$ *voient* respectivement les potentiels $X^2 \pm gX/2\omega$. Comme $\Delta \ll g$, les passages $|+\rangle \leftrightarrow |-\rangle$ deviennent de moins en moins probables. L'Hamiltonien est alors celui de deux oscillateurs symétriques indépendants déplacés chacuns de $\pm g/2$ et dont les spectres énergétiques sont structurellement identiques. Dans l'exemple de l'atome à deux niveaux en cavité, un g grand correspond à une plus grande taille de l'atome [2], et donc une barrière de potentiel plus importante et moins évidente à franchir pour la particule.

3.2.2 États propres en représentaion 'x'

En l'abscence de couplage ($g = 0$), les états de la base canonique sont états propre de l'Hamiltonien. On reconnait au signe près sur la figure (3.2), les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique libre, qui *habillent* successivement les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. Les deux chaînes d'états $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ apparaissent distinctement lorsqu'on constate que :

$$i \text{ paire} \Rightarrow \langle e|\psi_i\rangle = 0 \quad \text{et} \quad i \text{ impaire} \Rightarrow \langle g|\psi_i\rangle = 0 \tag{3.7}$$

Avec un couplage $g = 1$, la FIGURE 3.3 montre que les relations (3.7) ne sont plus vérifiées. Les états propres sont maintenant des combinaisons linéaires d'états canoniques de même chaîne de parité.

Grâce aux propriétes de symétrie de la *base dipolaire* $|\pm\rangle$, la représentation de $\psi_i^+(x) = (\ \langle +| \otimes \langle x|\ )|\psi_i\rangle$ est suffisante pour décrire complètement $|\psi_i\rangle$. La FIGURE 3.4 montre alors comment l'augmentation du couplage $g = 0 \to 1$ modifie les états propres.

2. voir annexe A.

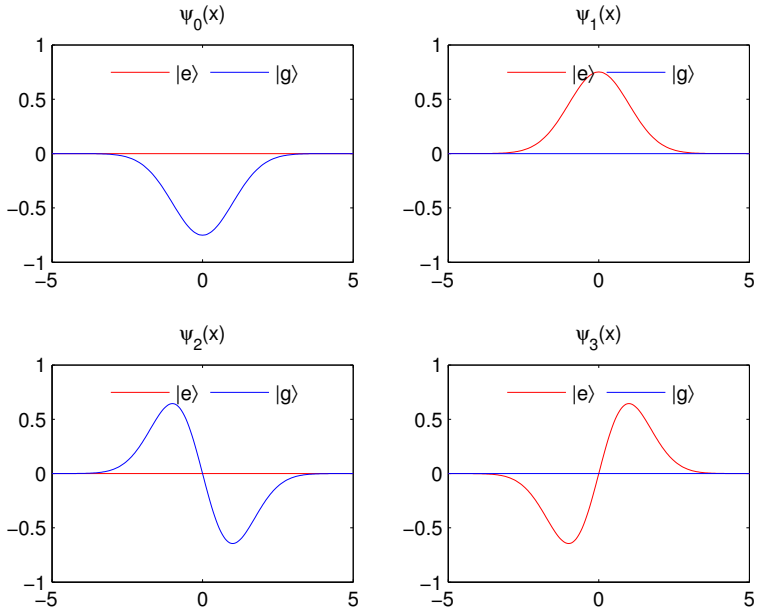

FIGURE 3.2 – États propre $\psi_i(x)$ en base $|\uparrow\downarrow\rangle$, $\Delta = 0.8$, g=0, $\omega = 1$

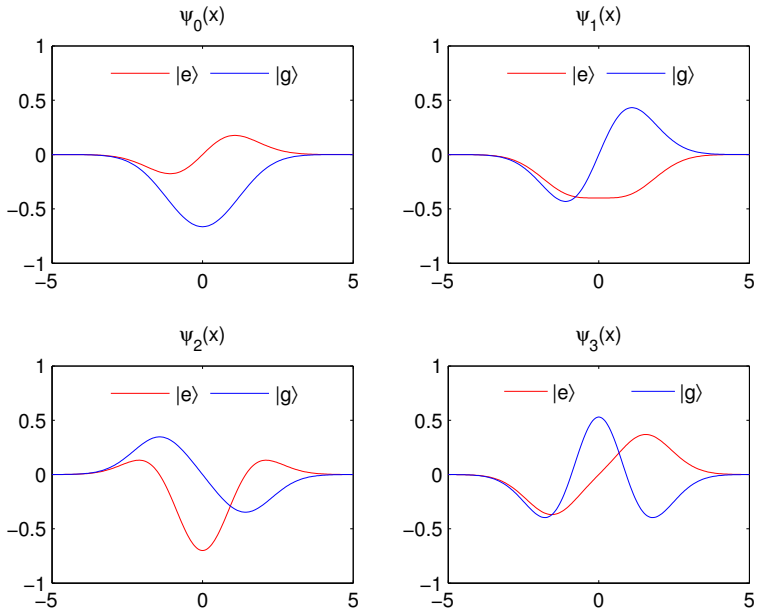

FIGURE 3.3 – États propre $\psi_i(x)$ en base $|\uparrow\downarrow\rangle$, $\Delta = 0.8$, g=1, $\omega = 1$

On constate un déplacement systématique vers la gauche, couplé à des déformations et d'éventuelles apparitions d'extrémums locaux. Les simulations à g grand, non-exposées ici, montrent qu'à partir d'une certaine valeur de la constante de couplage, les courbes reprennent leurs formes originelles, mais fortement déplacées, en cohérence avec ce qui a été explicité au § 3.2.1.

3.3 Étude dynamique

Tout état $|\Psi\rangle$ du système se décompose sur la base des états propres $|\psi_i\rangle$ de manière unique comme :

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i|\psi_i\rangle \quad \text{avec} \quad c_i \in \mathbb{C} \text{ et } \textstyle\sum_i^{+\infty}|c_i|^2 = 1 \tag{3.8}$$

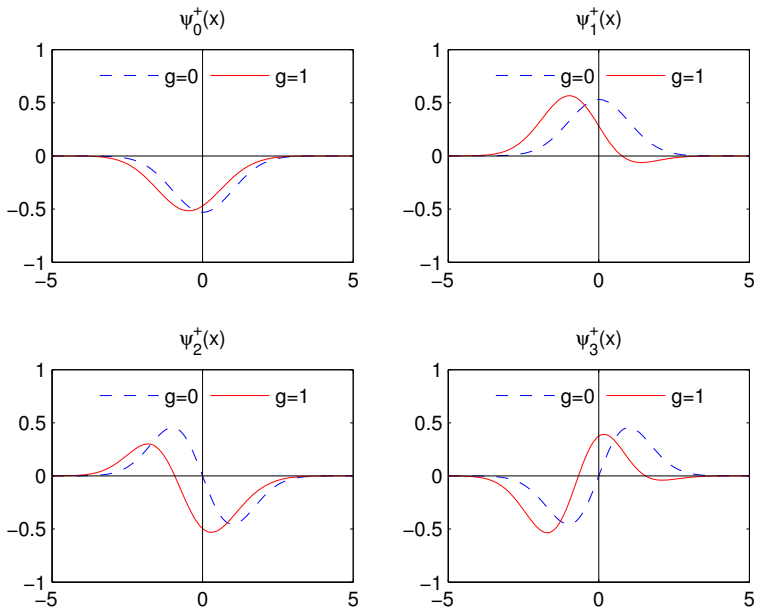

FIGURE 3.4 – États propre $\psi_i(x)$ en base $|\pm\rangle$, $\Delta = 0.8$, $\omega = 1$

Les équations de Shrödinger (2.39) et (3.5) permettent alors d'écrire :

$$|\Psi\rangle(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}|\psi_i\rangle \tag{3.9}$$

Nous prenons les conditions initiales (3.4) et comparons les dynamiques engendrées par les deux valeurs de couplage $g = \{0; 1\}$.

Abscence de couplage : g=0

En l'abscence de couplage, l'état préparé (3.4) est état propre de l'Hamiltonien. La probabilité de présence $||\Psi\rangle|^2$ de la particule est une constante du temps, et il n'y a pas d'évolution dynamique. En représentation 'x', l'état du système s'écrit $|\Psi(x,t)\rangle = \psi_0^+(x)|+\rangle + \psi_0^-(x)|-\rangle$, avec :

$$|\Psi(x,t)\rangle = \psi_0(x)|\downarrow\rangle = \psi_0^+(x)|+\rangle + \psi_0^-(x)|-\rangle \tag{3.10}$$

L'état du système appartient à la chaîne de parité $\mathcal{P}^-$ et la relation (2.43) donne :

$$\psi_0^+(x) = -\psi_0^-(-x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(x) \tag{3.11}$$

où $\psi_0(x)$ est l'état de Fock du vide. Conformément à la description quantique de l'oscillateur harmonique, la probabilité de mesurer une quantité $\hat{X}$ différente de 0 est non-nulle. Ainsi, dans l'exemple de l'atome en cavité, en l'abscence de photons, il est possible d'observer la présence d'un champ électromagnétique. Cette caractéristique est appelée *fluctuation quantique du vide*.

3.3.1 Couplage 'unitaire' : g=1

Avec un couplage porté à 1, l'état initial n'est plus un état propre de l'Hamiltonien et son énergie est supérieure à celle de l'état fondamental. Le système évolue au cours du temps le long de la chaine de parité $\mathcal{P}^-$. Comme le montre la FIGURE 3.5, les probabilités d'observer un état de spin $|\uparrow\rangle$ et un état de Fock différents de $|0\rangle$ deviennent non nulles au cours du temps, bien que les valeurs prises par $\langle n\rangle$ et $|\langle\uparrow|\Psi\rangle|^2$ témoignent de la prépondérance de l'état $|\downarrow, 0\rangle$ dans la dynamique.

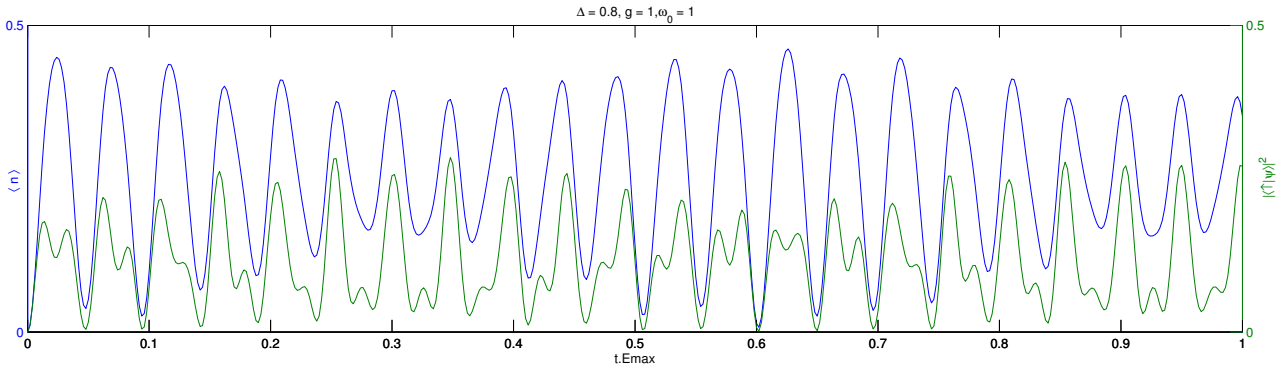

FIGURE 3.5 – Évolution $\langle n\rangle(t)$ et $|\langle\uparrow|\Psi\rangle|^2(t)$ en couplage 'unitaire' $g = 1$

Le fait que l'état $|\downarrow, 0\rangle$ évolue vers des états où $\langle n\rangle \neq 0$ va à l'encontre du sens commun. En effet, d'un point de vue classique, on s'attend à des échanges d'énergie entre le spin et l'oscillateur, de sorte que la transition $|\uparrow\rangle \rightleftarrows |\downarrow\rangle$ implique $|n\rangle \rightleftarrows |n+1\rangle$, ce qui se traduit formellement par l'Hamiltonien d'interaction H^{int}_{RWA} [3] :

$$H^{int}_{\text{RWA}} \overset{can}{\propto} \hat{a}\hat{\sigma}^+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^- \tag{3.12}$$

où $\hat{\sigma}^+$ et $\hat{\sigma}^-$ sont les opérateurs création et annihilation du spin définis par :

$$\hat{\sigma}^+ = \frac{\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^- = \frac{\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

De ce point de vue, les conditions initiales de la simulation effectuée ne permettraient pas *l'émission* d'un quanta puisque le spin est dans son état fondamental propre. L'évolution *contre-intuitive* du système observée avec un couplage de 1, s'interprête comme le fait que la préparation de l'état $|\downarrow, 0\rangle$ nécessite de fournir de l'énergie au système, et que cette énergie à l'instant initial n'est contenue ni dans l'état du spin, ni dans l'état de l'oscillateur, mais dans leur potentiel d'interaction qui n'a pas de *support objectif* [4].

Bien que le système soit insoluble analytiquement, il semble qu'il adopte un régime pseudo-oscillatoire de période $T.E_{max} \sim 0.04$. L'état le plus proche de l'état initial est atteint autour de $t.E_{max} = 0.6$. Le nombre moyen de quantas $\langle n\rangle$ a un comportement plus évident à décrire que la probabilité d'observer $|\uparrow\rangle$ dont l'évolution est plus chaotique. L'échelle de temps de la FIGURE 3.6 permet de mieux appréhender le régime global d'oscillation. Une piste de recherche serait d'effectuer des analyses fréquentielles afin d'envisager des moyens pertinents d'approximation de la dynamique.

$|\psi^+\rangle$ en représentation 'x' Les variations pseudo-oscillatoires présentées au paragraphe précédent se retrouvent dans le comportement de $\psi^+(x,t)$. La FIGURE 3.7 montre l'évolution de $|\psi^+(x,t)|^2$ aux premiers instants. On peut voir la première pseudo-période du mouvement si l'on suit les zones les plus rouges. Cependant, le mouvement de la fonction est complexe et les dynamiques de chacune de ses caractéristiques (i.e. de ses différents moments) ne semblent pas corrélées.

Cependant, le visionnage de films conçus à partir des graphiques $y = \psi^+(x,t)$ permet d'envisager certaines investigations. Ainsi La FIGURE 3.8 réunit des images d'instants caractéristiques de l'évolution temporelle

1. Tout d'abord, le premier graphique montre l'état du système à l'instant initial. Il s'agit bien de l'état de vide attendu, en tenant compte du fait qu'il manque [5] ici la contribution de ψ^-.
2. Le troisième graphique réprésente l'état obtenu après un temps $t.E_{max} = 0.6$. Il est quasiment identique au premier, en cohérence avec la remarque faite lors de la description de $\langle n\rangle(t)$.
3. Sur les second et quatrième graphiques, on voit apparaître un lobe secondaire qui semble s'ajouter au lobe principal, à côté ou à l'intérieur de ce dernier.

3. Il s'agit de l'expression de l'Hamiltonien d'interaction lorsque la *Rotating Wave Approximation* est effectuée. Cette approximation est pertinente pour $g \ll 1$, et conduit à un système analytiquement solvable.

4. Ce terme est employé au sens de *"porté par un des objets"* que sont la particule et le champs électromagnétique, dans l'exemple de l'atome en cavité.

5. En effet, nous avons $\int \psi^+ dx = 1/2 \neq 1$.

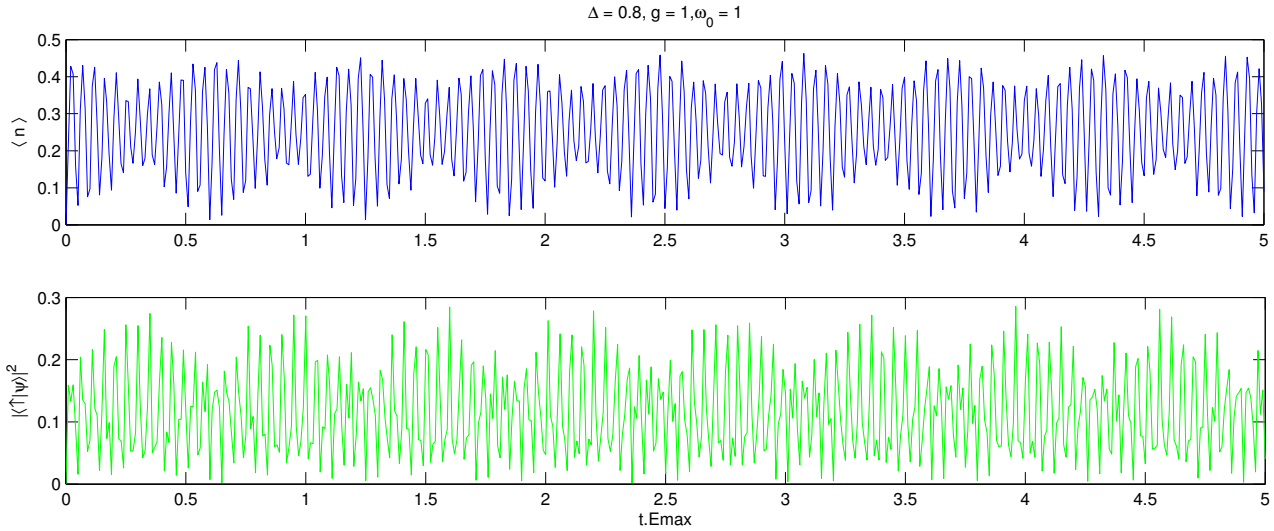

FIGURE 3.6 – Évolution $\langle n \rangle(t)$ et $|\langle\uparrow|\Psi\rangle|^2(t)$ en couplage 'unitaire' $g = 1$

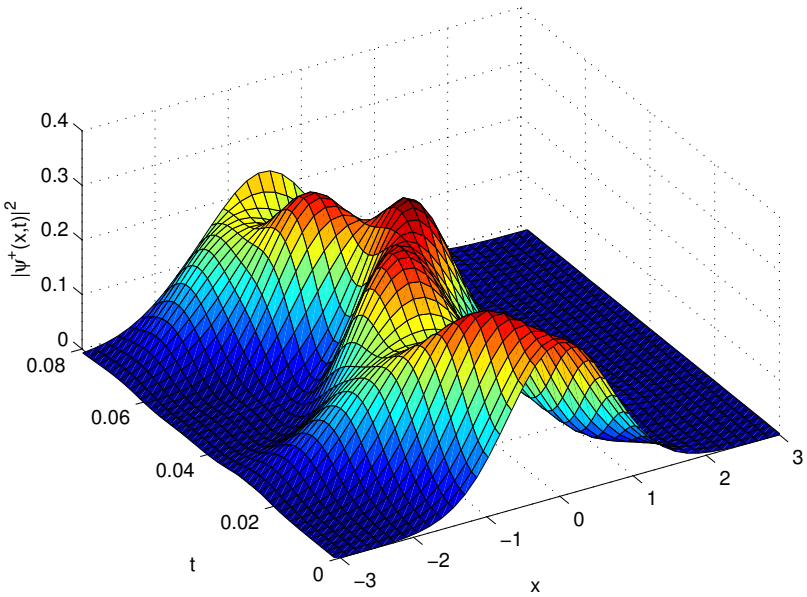

FIGURE 3.7 – $|\psi^+(x,t)|^2$.

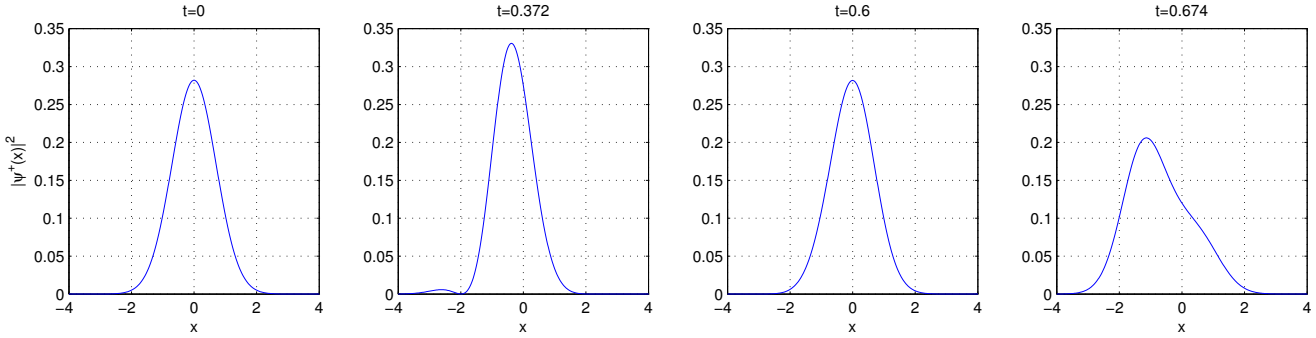

FIGURE 3.8 – $|\psi^+(x)|^2$ à différents temps.

Tentative d'approximation

Cette dernière observation conduit à envisager une méthode d'approximation afin d'obtenir une description mathématique de ψ^+ plus simple qui permettrait de dégager de nouveaux axes d'analyse. Partant de la présence de deux lobes, l'idée est d'approcher la fonction $|\psi^+(x)|^2$ par une fonction $f(x,\vec{\lambda})$ de paramètre $\vec{\lambda}$, somme de deux gaussiennes $f_1(x,\vec{\lambda})$ et $f_2(x,\vec{\lambda})$:

$$f(x,\vec{\lambda}) = f_1(x,\vec{\lambda}) + f_2(x,\vec{\lambda}) = \lambda_1 e^{-\lambda_2(x-\lambda_3)^2} + \lambda_4 e^{-\lambda_5(x-\lambda_6)^2} \tag{3.14}$$

L'approximation est effectué par méthode dites de "descente itérative" . La fonctionelle que nous cherchons à minimiser est :

$$S(\vec{\lambda}) = \int \left[|\psi^+(x)|^2 - f(x,\vec{\lambda})\right]^2 dx \tag{3.15}$$

La relation de récurrence sur λ_i est :

$$\vec{\lambda}_{i+1} = \vec{\lambda}_i - 2 * \frac{\vec{\nabla} S(\vec{\lambda}_i)}{\Delta S(\vec{\lambda}_i)} \tag{3.16}$$

Cette opération est effectuée jusqu'à $i = 10^3$. Le vecteur intitial à $t = 0$ est établi à partir de la norme, du moment d'ordre 1 et du moment centré d'ordre 2 de $|\psi^+(x,0)|^2$. Les vecteurs finaux aux instant t servent de vecteurs initiaux aux instants $t + \delta t$.

Un exemple de résultat est donné dans la FIGURE 3.9. La premier graphique superpose $|\psi^+(x)|^2$ et $f(x,\vec{\lambda})$, tandis que le second et le troisième dessinent respectivement $f_1(x,\vec{\lambda})$ et $f_2(x,\vec{\lambda})$.

À l'instar des graphiques aux autres instants, non-présentés ici, l'approximation fonctionne plutôt bien, même si à la base du lobe, les deux courbes se différencient nettement. Cependant, le graphique de $f_2(x)$ est surprenant en ce qu'il est négatif. Cela n'a même pas de sens si l'on considère que chaque fonction f_i doit avoir la propriété de positivité relative aux distributions.

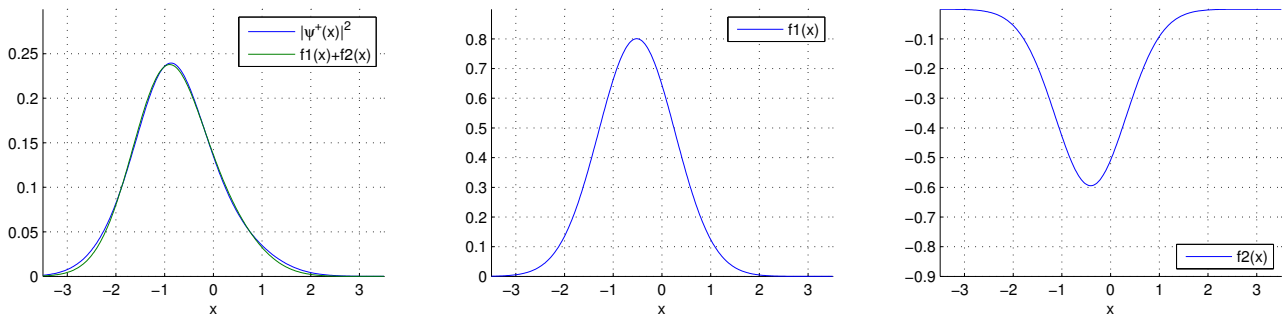

FIGURE 3.9 – $\psi^+(x)$ approximé par $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

À ce stade, deux interprétations sont possibles :

1. La méthode d'approximation n'est pas la bonne. Il faudrait revoir la fonctionnelle à minimiser et l'algorithme de descente en ajoutant une contrainte de positivité.
2. Le fait d'observer une *probabilité négative* de $f_2(x)$ n'est pas une aberration en soi. Il faudrait alors analyser la dynamique de $\vec{\lambda}$ pour établir si l'on peut s'appuyer dessus pour avancer sur la compréhension du sytème, ou encore effectuer d'autres approximations sur des systèmes dynamiques bien établis pour tester la solidité de la méthode d'approche.

La deuxième interprétation est la plus motivante à évaluer. Sa pertinence, en ce qu'elle est 'absurde', ouvrirait peut-être des champs d'investigation intéressants.

3.3.2 Espace des phases et Distribution de Wigner

Lorsque l'on souhaite représenter un oscillateur quantique dans l'espace des phases, le principe d'incertitude d'Heisenberg entraîne que le système ne soit plus décrit par un point dans cet espace, mais par une *pseudo-distribution* de probabilité. Ces pseudo-distributions, fonctions f des coordonnées conjugées x et p, généralement réunies dans un nombre complexe $\alpha = x+ip$, prennent des valeurs réelles et vérifient la condition de normalisation $\int f(\alpha)d\alpha = 1$. Elles sont qualifiées de pseudo-distribution car elle peuvent prendre des valeurs négatives.

Ainsi est-ce le cas de la *distribution de Wigner* W établie en 1932. Sa négativité est une propriété à laquelle il est difficile de donner du sens, mais qui est un marqueur du caractère quantique et des phénomènes d'intrication du système. Plusieurs formulations équivalentes permettent de la définir. Son expression :

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Tr}\big[D(-\alpha)\rho D(\alpha)(P)\big] = \frac{2}{\pi}\langle\Psi|D(\alpha)\mathcal{P}D(-\alpha)|\Psi\rangle \tag{3.17}$$

offre une interprétation accessible. Ici, $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ est la matrice densité du système, $D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ l'opérateur déplacement dans l'espace des phases et $\mathcal{P} = (-1)^{\hat{a}^\dagger\hat{a}}$ l'opérateur parité des états de Fock. Ainsi, après avoir noté que $(D(-\alpha)|\Psi\rangle)^\dagger = \langle\Psi|D(\alpha)$, la seconde égalité permet d'établir que W est proportionnelle à la valeur moyenne $\langle\mathcal{P}\rangle$ de l'opérateur parité, en considérant un système déplacé de $-\alpha$.

La distriubtion de Wigner étudiée dans la suite est celle de $|\Psi^+\rangle = \langle+|\Psi\rangle$, projection qui contient toute l'information du système, dans la mesure où l'état initial est décrit sur un seul des deux secteurs de parité (voir § 2.2.2).

L'expression de W pour un état combinaison linéaire d'états de Fock $|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n|n\rangle$ est établie dans l'annexe B (équation (B.13)). Les simulations se cantonnent à l'intervalle de temps de la première pseudo-période et les FIGURE 3.10 et 3.11 présentent les résultat sous deux formes complémentaires.

Sur chaque image de la FIGURE 3.10, la valeur moyenne de $\alpha = x + ip$ et sa trajectoire depuis l'instant inital sont repérées par la croix et la courbe noire. A la fin de la pseudo-période, la valeur moyenne ne revient pas exactement à sa position initiale et ce phénomène s'accentue aux temps plus longs, en restant malgré tout au voisinage de l'origine. La trajectoire évoque celle d'un oscillateur libre classique déformé. Ainsi, le caractère pseudo-chaotique de la dynamique apparaît significativement dès la première période.

Les zones négatives de la distribution apparaissent en bleu légèrement plus sombre. Ce faible contraste témoigne de faibles intrications quantiques dues à la prépondérance de l'état de vide dans la dynamique (voir § 3.3.1). Ces zones semblent déformer le lobe initialement symétrique de la distribution. La FIGURE 3.11 permet de mieux apréhender ce phénomène par l'utilisation de courbes de niveaux. Si l'on perd de l'information sur la profondeur des "creux" de la distribution de Wigner, les zones négatives se définissent clairement, révélant même la présence de certaines d'entre elles qui étaient invisibles sur la figure précédente.

À l'instar de ce qui a été proposé au § 3.3.1 il serait intéressant de tenter une approximation par une somme d'états cohérents [6] pondérés positifs et négatifs . Une autre piste de recherche serait d'étudier les zones négatives et les zéros de la distribution de Wigner de manière plus générale en s'appuyant par exemple sur des systèmes bien caractérisés.

6. états de *vide déplacé* qui sont les états quantiques les plus proches des états classiques. Leur importance dans le cadre de la théorie quantique est de premier plan, mais n'a pas été exploitée dans ce document.

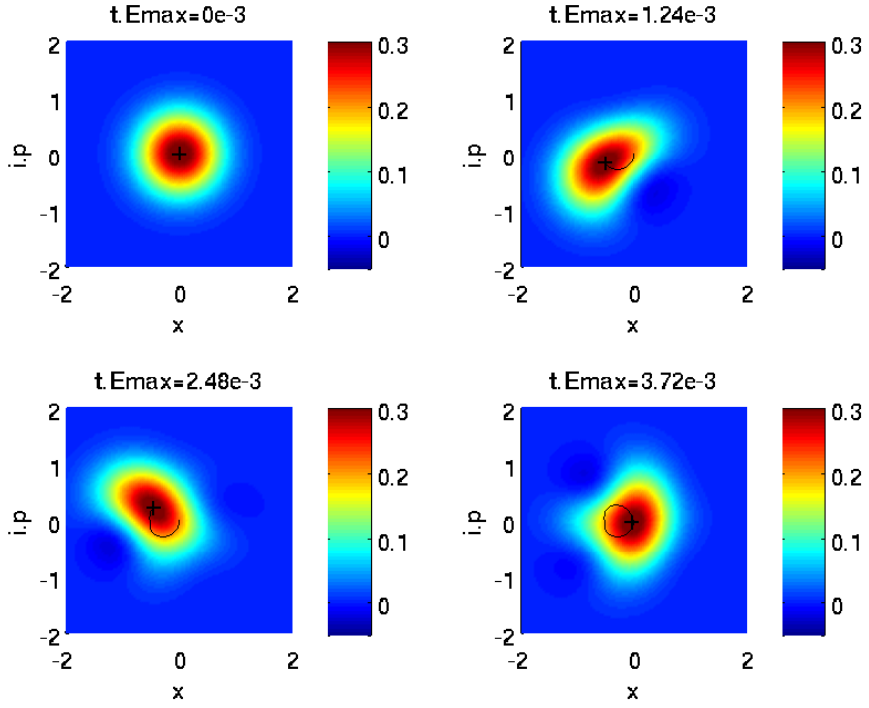

FIGURE 3.10 – Distribution de Wigner de $\langle +|\Psi\rangle$ dans l'espace des phases.

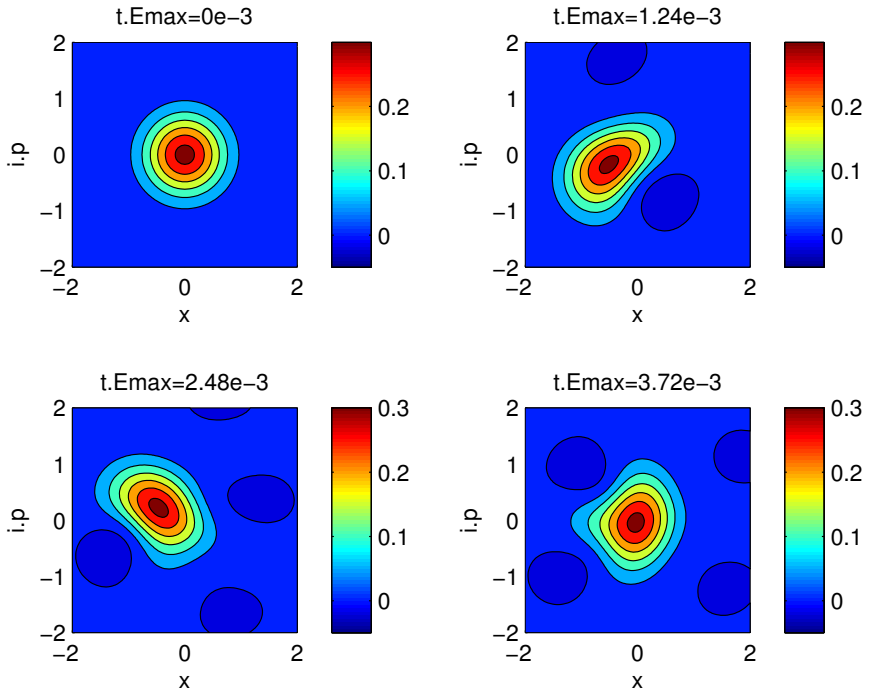

FIGURE 3.11 – Lignes de niveau de la distribution de Wigner de $\langle +|\Psi\rangle$ dans l'espace des phases.

Chapitre 4

Conclusion

Le QERM en couplage 'unitaire', même dans sa forme la plus simple, ne connait pas à ce jour de résolution analytique simple. La dynamique d'un système préparé dans l'état canonique $|\downarrow, 0\rangle$ révèle immédiatement son caractère chaotique et imprévisible.

Cependant, les données issues des simulations offrent certaines pistes de réflexion pour envisager des méthodes d'approximation pertinentes. Ainsi, les analyses fréquentielles des régimes pseudo-oscillatoires des quantités caractéristiques $\langle n \rangle$ ou $|\langle \uparrow \Psi \rangle|^2$, pourraient aiguiller sur les prochains champs d'investigation en mettant en évidence leurs éventuelles corrélations avec les paramètres initiaux du système. De même, une approximation efficace par des sommes d'états cohérents pondérés offrirait peut-être une base conceptuelle solide pour se représenter les phénomènes en présence et développer de nouveaux outils d'analyses.

Enfin, les idées avancées dans ce document mériteraient de faire l'objet d'échanges et de discussions, afin d'établir leur validité et leur pertinence.

Remerciements Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de stage Serge Florens pour sa disponibilité, son écoute et pour tous nos échanges qui m'ont permis de mieux cerner l'objet de mon étude, ainsi que mes professeurs de mécanique quantique, mécanique analytique, optique ondulatoire, électromagnétisme et outils numérique à l'Université Joseph Fourier dont les enseignements m'ont offert l'autonomie nécessaire à ce travail.

Chapitre 5

Bilbliographie

- Haroche Serge et Raimond Jean-Michel, *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities and Photons*, 2006, New York, Oxford University Press, 605 p.
- Cohen-Tannoudji Claude, Dupont-Roc Jacques, Grynberg Gilbert, *Photons et Atomes, Introsuction à l'électrodynamique quantique*, 1987, Paris, CNRS Édition, 476p.
- Basdevant Jean-Louis et Dalibard Jean, *Mécanique Quantique, Cours de l'École polytechnique*, 2002, 516p.

Annexe A

Quantification de l'Hamiltonien

L'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int[\vec{E}^2 + (c\vec{B})^2]d^3\vec{r} \tag{A.1}$$

A.1 Equation de Maxwell, potentiels vecteur et scalaire

A.1.1 Équation de Maxwell

En définissant la transformation de Fourier spatiale par :

$$\mathcal{E}(\vec{k}) = \int E(\vec{r})\exp(-i\vec{k}.\vec{r})d^3\vec{r}/(2\pi)^{3/2} \tag{A.2}$$

Les quatre équations de Maxwell s'expriment dans l'espace réel et dans l'espace réciproque défini comme :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad &\leftrightarrow \quad i\vec{k}.\vec{\mathcal{E}} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\
\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad &\leftrightarrow \quad i\vec{k}\wedge\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \\
\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad &\leftrightarrow \quad i\vec{k}.\vec{\mathcal{B}} = 0 \\
\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{c^2\partial t} \quad &\leftrightarrow \quad i\vec{k}\wedge\vec{\mathcal{B}} = \mu_0\vec{\iota} + \frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{c^2\partial t}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Après avoir posé $\vec{u}_k = \vec{k}/\|\vec{k}\|$, on définit les composantes parallèles et transversales des champs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ par :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_\parallel = \vec{\mathcal{E}}.\vec{u}_k \quad &\text{et} \quad \vec{\mathcal{E}}_\perp = \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}_\parallel \\
\vec{\mathcal{B}}_\parallel = \vec{\mathcal{B}}.\vec{u}_k \quad &\text{et} \quad \vec{\mathcal{B}}_\perp = \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{B}}_\parallel
\end{aligned} \tag{A.4}$$

de sorte que :

$$\vec{\mathcal{E}}_\parallel.\vec{\mathcal{E}}_\perp = \vec{\mathcal{B}}_\parallel.\vec{\mathcal{B}}_\perp = 0 \tag{A.5}$$

Les équations (A.3) et (A.3) indiquent immédiatement que :

$$\vec{\mathcal{E}}_\parallel = -\frac{i\varrho\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}, \quad \vec{\mathcal{B}}_\parallel = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}}_\perp = \vec{\mathcal{B}} \tag{A.6}$$

A.1.2 Potentiels vecteur et scalaire

Si l'on introduit maintenant les potentiels vecteur $\vec{A}$ et scalaire U reliés aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par les relations :

$$\begin{aligned}
\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad &\leftrightarrow \quad \vec{\mathcal{E}} = -i\mathcal{U}\vec{k} - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \\
\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \quad &\leftrightarrow \quad \vec{\mathcal{B}} = i\vec{k}\wedge\vec{\mathcal{A}}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Il vient pour le champs $\vec{\mathcal{E}}$:

$$\vec{\mathcal{E}}_{\parallel} = -i\mathcal{U}\vec{k} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathcal{A}}_{\parallel} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{E}}_{\perp} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathcal{A}}_{\perp} \tag{A.8}$$

En se plaçant en jauge de Coulomb définie par :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \quad \leftrightarrow \quad i\vec{k}.\vec{\mathcal{A}} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{\mathcal{A}}_{\parallel} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{\mathcal{A}}_{\perp} = \vec{\mathcal{A}} \tag{A.9}$$

Les expressions (A.8) deviennent :

$$\vec{\mathcal{E}}_{\parallel} = -i\mathcal{U}\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{E}}_{\perp} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathcal{A}} \tag{A.10}$$

A.1.3 Nouvelle expression de H

En s'appuyant sur l'égalité de Parceval :

$$\int F^*(\vec{r})G(\vec{r})d^3\vec{r} = \int \mathcal{F}^*(\vec{k})\mathcal{G}(\vec{k})d^3\vec{k} \tag{A.11}$$

sur les relations (A.4), (A.4), (A.5), et sur la linéarité de l'intégrale, il est possible de réecrire l'Hamiltonien (A.1) comme :

$$H = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\vec{k}\ |\vec{\mathcal{E}}_{\parallel}|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\vec{k}[\ |\vec{\mathcal{E}}_{\perp}|^2 + (c|\vec{\mathcal{B}}_{\perp}|)^2\ ] \tag{A.12}$$

En introduisant les potentiels définis au paragraphe A.1.2, en notant que, pour une particule chargée, la vitesse et l'impulsion sont reliées par $\vec{v} = \vec{p} - q\vec{A}$, et que le champ $\vec{\mathcal{E}}_{\parallel}$ a deux expressions différentes (A.6) et (A.10), il vient également :

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + \int d^3\vec{r}\frac{\rho U}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\vec{k}[\ |\dot{\mathcal{A}}|^2 + (ck|\mathcal{A}|)^2\ ] \tag{A.13}$$

où $k = \|\vec{k}\|$. On identifie alors pour chacun des termes de la particule les contributions des champs électromagnétiques (cem) parallèle et transverse :

$$H = H^{part} + H_{\parallel}^{cem} + H_{\perp}^{cem} \tag{A.14}$$

A.2 Contribution du champ électrique longitudinal

En considérant que notre système est composé d'une charge q_α en $\vec{r}_\alpha$ et d'une charge q_β de masse infinie située en $\vec{r}_\beta = \vec{0}$, la densité de charge est définie respectivement dans l'espace réel et l'espace réciproque par :

$$\rho = \sum_m q_m\delta(\vec{r} - \vec{r}_m) \quad \longleftrightarrow \quad \varrho = \sum_m \frac{q_m e^{-i\vec{k}.\vec{r}_m}}{(2\pi)^{3/2}} \tag{A.15}$$

Dès lors, en reprenant (A.6) et (A.12), l'Hamiltonien du champs parallèle s'écrit :

$$\begin{aligned}
H_{\parallel}^{cem} &= \frac{1}{2\varepsilon_0}\int \frac{\varrho^*\varrho}{k^2}d^3\vec{k} \\
&= \frac{1}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}\sum_{m,n} q_m q_n \int e^{i\vec{k}.\vec{r}_m}\frac{e^{-i\vec{k}.\vec{r}_n}}{k^2}d^3\vec{k} \\
&= \sum_m \frac{q_m^2}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{k^2} + \sum_{m\neq n}\frac{q_m q_n}{8\pi\varepsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}d^3\vec{r} \\
&= \sum_m \frac{q_m^2}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{k^2} + \sum_{m\neq n}\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_m q_n}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|} \\
&= \epsilon^{coul} + V^{coul}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

La quantité ϵ^{coul} correspond à l'énergie coulombienne propre des particules. C'est une quantité infinie à moins d'introduire une coupure dans l'intégrale sur $\vec{k}$. Cette anomalie est due aux limites du modèle mathématique qui n'est plus valable lorsque l'on s'approche infinement près de la charge. Ce terme n'etant pas pertinent, il sera négligé dans la suite.

La quantité V^{coul} correspond aux énergies d'interactions coulombiennes entre les particules. Dans les conditions décrites en début de section, et parce que seule la particule α nous intéresse, nous réécrivons :

$$V^{coul} = q_\alpha U \quad \text{avec} \quad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\beta}{|\vec{r}_\alpha|} \tag{A.17}$$

L'Hamiltonien se resume finalement à :

$$H = H^{part} + V^{coul} + H_\perp^{cem} \tag{A.18}$$

A.3 Quantification du champ transverse

Les expressions de l'Hamiltonien (A.13) et (A.14) nous donnent pour le champs transverse :

$$H_\perp^{cem} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\dot{\mathcal{A}}|^2 + (ck)^2|\mathcal{A}|^2 d^3\vec{k} \tag{A.19}$$

La formulation lagrangienne de l'électrodynamique dans l'espace réciproque nous indique qu'en jauge de Coulomb le moment conjugué $\vec{\Pi}$ de la coordonnée $\vec{\mathcal{A}}$ est $\vec{\Pi} = \partial\mathcal{L}/\partial\vec{\mathcal{A}}^* = \varepsilon_0\dot{\vec{\mathcal{A}}}$. En posant $\omega(\vec{k}) = ck$ et en réécrivant l'Hamiltionien comme :

$$H_\perp^{cem} = \int \frac{|\Pi|^2}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\omega^2|\mathcal{A}|^2 d^3\vec{k} \tag{A.20}$$

On constate l'analogie avec l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique $H = P^2/2m + m\omega^2X^2/2$. En considérant les variables $\vec{\Pi}$ et $\vec{\mathcal{A}}$ comme des opérateurs, en postulant le relation de commutation $[(\vec{\mathcal{A}})_m, (\vec{\Pi}^\dagger)_n] = i\hbar\delta_{mn}$ avec $m, n = x, y, z$, et en effectuant les changements de variable $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\Pi}/\sqrt{\hbar\omega\varepsilon_0}$ et $\vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{A}}\sqrt{\omega\varepsilon_0/\hbar}$, l'Hamiltonien prend la forme :

$$H_\perp^{cem} = \int \frac{\hbar\omega}{2}(|\vec{\mathcal{P}}|^2 + |\vec{\mathcal{X}}|^2)d^3\vec{k} \tag{A.21}$$

où $\vec{\mathcal{X}}$ et $\vec{\mathcal{P}}$ ont la relation de commutation $[(\vec{\mathcal{X}})_m, (\vec{\mathcal{P}}^\dagger)_n] = [(\vec{\mathcal{X}}^\dagger)_m, (\vec{\mathcal{P}})_n] = i\delta_{mn}$. En introduisant les opérateurs annihilation et création $a = (\mathcal{X} + i\mathcal{P})/\sqrt{2}$ et $a^\dagger = (\mathcal{X}^\dagger - i\mathcal{P}^\dagger)/\sqrt{2}$, on trouve :

$$\begin{aligned} H_\perp^{cem} &= \int \hbar\omega[(a^\dagger a)(\vec{k}) + (aa^\dagger)(-\vec{k})]d^3\vec{k} \\ &= \int \hbar\omega[(a^\dagger a)(\vec{k}) + (aa^\dagger)(\vec{k})]d^3\vec{k} \\ &= \int \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)d^3\vec{k} \end{aligned} \tag{A.22}$$

où l'on a changé $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ dans le second terme de l'intégrale, et utilisé le communtateur $[a, a^\dagger] = 1$.

A.4 Contribution de la particule

Le developpement de H^{part} dans (A.13) donne, après avoir constaté que p et A commutent en jauge de coulomb [1] :

$$\begin{aligned} H^{part} &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{m}\vec{p}.\vec{A} + \frac{q^2\vec{A}^2}{2m} \\ &= H^p + H^{I1} + H^{I2} \end{aligned} \tag{A.23}$$

1. voir Cohen-Tanoudji photons et atomes. Introduction à lélectrodynamique quantique, p.199

On montre que le rapport $H^{I1}/H^{I2} \simeq H^p/H^{I1}$ [2]. Dès lors, pour des champs de faible intensité, on peut négliger le terme H^{I2} de sorte que :

$$\begin{aligned} H^{part} &= H^p + H^{I1} \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{m}\vec{p}.\vec{A} \end{aligned} \tag{A.24}$$

A.4.1 Changement de jauge et quantification

Précisons ici que les longueurs d'onde du champ électromagnétique dans la cavité sont des micro-ondes dont les longueurs sont bien supérieures aux dimensions du système matériel. Ainsi, il est possible d'effectuer une approximation dipolaire en considérant que les variables de champs ont une même valeur à chaque instant dans la région $\mathcal{D}$ de l'espace accessible par la particule :

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{0},t), \forall \vec{r} \in \mathcal{D} \tag{A.25}$$

Dès lors, en effectuant le changement de jauge :

$$\begin{aligned} \vec{A'} &= \vec{A}(\vec{0},t) + \vec{\nabla}.\chi(\vec{r},t) \\ U' &= U - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{A.26}$$

avec

$$\chi(\vec{r},t) = -\vec{r}.\vec{A}(\vec{0},t) \tag{A.27}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} A'(\vec{r},t) &= 0 \\ U'(\vec{r},t) &= U(\vec{r},t) + \vec{r}.\frac{\partial \vec{A}(\vec{0},t)}{\partial t} = U(\vec{r},t) - \vec{r}.\vec{E}_\perp(\vec{0},t)) \end{aligned} \tag{A.28}$$

Le terme d'interaction apparait maintenant lors de la transformation de V^{coul} par le changement de jauge. Il est relié explicitement au champs électrique transverse à l'origine, et à la position de la particule :

$$H^{I1} = -q\vec{R}.\vec{E}_\perp(\vec{0},t)) \tag{A.29}$$

Les développements effectués depuis le début permettent d'exprimer $E_\perp$ en fonction de a et $a^\dagger$:

$$\vec{E}_\perp(\vec{r},t) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}[\vec{a}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{a^\dagger}(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}.\vec{r}}]d^3\vec{k} \tag{A.30}$$

Effectuons maintenant le changement de variable :

$$b = -ia \quad \leftrightarrow \quad a = ib \tag{A.31}$$

qui donne :

$$\vec{E}_\perp(\vec{r},t) = \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}[\vec{b}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{b^\dagger}(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}.\vec{r}}]d^3\vec{k} \tag{A.32}$$

Au centre du repère, la relation devient :

$$\vec{E}_\perp(\vec{0},t) = \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}[\vec{b}(\vec{k},t) + \vec{b^\dagger}(\vec{k},t)]d^3\vec{k} \tag{A.33}$$

Dès lors, l'Hamiltonien d'interaction s'écrit :

$$H^{I1} = \frac{q}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}\vec{R}.(\vec{b} + \vec{b^\dagger})d^3\vec{k} \tag{A.34}$$

Qui permet, après avoir constaté que $a^\dagger a = b^\dagger b$, de réecrire l'Hamiltonien total :

2. voir Cohen-Tanoudji photons et atomes. Introduction à l'électrodynamique quantique, p.200

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + \int \gamma \vec{R}.(\vec{b} + \vec{b}^\dagger) + \Omega(\vec{b}^\dagger \vec{b} + 1/2) d^3\vec{k} \tag{A.35}$$

avec $\gamma = \frac{q}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\Omega}{2\varepsilon_0}}$ et $\Omega = \hbar\omega$.

A.5 Quantification de P et R

Afin de simplifier le modéle, nous allons considérer qu'une seule polarisation de direction $\vec{u}_x$ et de fréquence ω_0 est présente dans la cavité afin de s'affranchir de l'intégrale, et que le mouvement de la particule s'effectue selon cette direction afin de retomber sur une équation scalaire :

$$H = \frac{P^2}{2m} + V^{coul} + \gamma_0 R.(b + b^\dagger) + \Omega_0(b^\dagger b + 1/2) \tag{A.36}$$

De plus, le potentiel V^{coul} est maintenant modélisé comme une fonction de x symétrique, admettant deux minimum en $x = \pm d$, un maximum local en $x = 0$ et divergente à l'infini :$\lim_{x\to\pm\infty} V = +\infty$, à la manière du potentiel utilisé lors de la modélisation de la molécule d'amoniac [3]. Ce modèle est approximé par un puits double, dont seuls deux états symétrique et antisymétrique $|e\rangle$ et $|g\rangle$ d'énergie $\pm\Delta/2$ sont accessibles par la particule.

Ainsi, la particule est equivalente à un système à deux niveaux ou 'spin' et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{2m} + V^{coul} &= \frac{\Delta}{2}\sigma_z \\ R &= d\sigma_x \end{aligned} \tag{A.37}$$

où σ_x et σ_z sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.38}$$

Finalement, en redéfinissant l'opérateur $a \equiv b$, en postulant $\hbar = 1$ et en changeant l'origine des énergies afin que le terme 1/2 disparaisse de $H_\perp^{cem}$, l'Hamiltonien devient celui du modèle de Jaynes-Cumming :

$$H = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + \frac{g}{2}\sigma_x(a + a^\dagger) + \omega a^\dagger a \tag{A.39}$$

avec $g = \frac{2qd}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega}{2\varepsilon_0}}$.

3. voir Mecanique quantique, Basdevant et Dalibard, p.92

Annexe B

Fonction de Wigner

Soit un état $|\psi\rangle$ appartenant à l'espace de Hilbert $\mathcal{E}_{Fock}$ décomposé sur la *base de Fock* $\{|n\rangle\}$ comme :

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n |n\rangle \tag{B.1}$$

B.1 Opérateur déplacement

L'opérateur déplacement $D(\lambda)$ est un opérateur qui translate un état $|\psi\rangle$ dans l'espace des phases de $\lambda = x + ip$. Il est égal à un terme de phase près au produit d'une translation T_x sur l'axe réél et d'une translation T_p sur l'axe imaginaire :

$$\begin{aligned} & D(\lambda) \propto T_p T_x = e^{ip\hat{X}} e^{-ix\hat{P}} = e^{ixp} e^{\lambda \hat{a}^\dagger - \lambda^* \hat{a}} \\ \Longrightarrow \quad & D(\lambda) \equiv e^{\lambda \hat{a}^\dagger - \lambda^* \hat{a}} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Où l'on a utilisé l'identité de Glauber :

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \tag{B.3}$$

valable si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent chacun avec le commutateur $[\hat{A}, \hat{B}]$, et pris pour définition $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, $\hat{X} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ et $\hat{P} = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$

B.2 Fonction caractéristique symétrique

La fonction caractéristique symétrique est une fonction de λ égale à la valeur moyenne de l'opérateur déplacement. Elle correspond ainsi au recouvrement d'un état avec son image déplacée de λ.

$$\begin{aligned} C_s^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\lambda) &\equiv \langle\psi|D(\lambda)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|e^{\lambda \hat{a}^\dagger - \lambda^* \hat{a}}|\psi\rangle \end{aligned} \tag{B.4}$$

et en constatant que : $[\lambda \hat{a}^\dagger, -\lambda^* \hat{a}] = |\lambda|^2 \hat{\mathbb{I}\mathrm{d}}$, il vient :

$$\begin{aligned} C_s^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\lambda) &= \langle\psi|e^{\lambda \hat{a}^\dagger} e^{-\lambda^* \hat{a}} e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}}|\psi\rangle \\ &= e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} C_n^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\lambda) \end{aligned} \tag{B.5}$$

où nous avons introduit la fonction caractéristique normale définie ci-après.

B.3 Fonction caractéristique normale

Les exponentiations séparées des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ dans la fonction caratéristique normale permettent d'établir son expression en fonction des coefficient de Fock γ_i. Cette fonction sera la base de notre développement pour établir la fonction de Wigner :

$$
\begin{aligned}
C_n^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\lambda) &\equiv \mathrm{Tr}\left[|\psi\rangle\langle\psi|e^{\lambda\hat{a}^\dagger}e^{-\lambda^*\hat{a}}\right] \qquad \text{(B.6)}\\
&= \langle\psi|e^{\lambda\hat{a}^\dagger}e^{-\lambda^*\hat{a}}|\psi\rangle\\
&= \left(\sum_{m=0}^{+\infty}\gamma_m^*\langle m|e^{\lambda\hat{a}^\dagger}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n e^{-\lambda^*\hat{a}}|n\rangle\right)\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\langle m|e^{\lambda\hat{a}^\dagger}e^{-\lambda^*\hat{a}}|n\rangle\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\langle m|\hat{a}^{\dagger k}\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda^*)^l}{l!}\hat{a}^l|n\rangle\right)\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!}\langle m|\sqrt{\frac{m!}{k!}}\right)\left(\sum_{l=0}^{n}\frac{(-\lambda^*)^{n-l}}{(n-l)!}|n\rangle\sqrt{\frac{n!}{l!}}\right)\\
&= \sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\left(\sum_{k,l=0}^{m,n}\frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!}\frac{(-\lambda^*)^{n-l}}{(n-l)!}\sqrt{\frac{m!n!}{k!l!}}\langle m|n\rangle(=\delta_{m,n})\right)\\
&= \sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\left(\sum_{k=0}^{\min\limits_{(m,n)}}\frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!}\frac{(-\lambda^*)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\sqrt{m!n!}}{k!}\right) \qquad \text{(B.7)}
\end{aligned}
$$

B.4 Distribution de Wigner

La distribution de Wigner est une sorte de transformée de Fourier dans le plan complexe de la fonction caractéristique symétrique. Elle est réelle : $W(\alpha) \in \mathbb{R}$, $\forall\alpha \in \mathbb{C}$, verifie la propriété $\iint_{\mathbb{C}} d^2\alpha W(\alpha) = 1$ et est définie par :

$$
\begin{aligned}
W^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\alpha) &\equiv \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbb{C}} d^2\lambda C_s^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\lambda)e^{\alpha\lambda^*-\alpha^*\lambda} \qquad \text{(B.8)}\\
&= \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbb{C}} d^2\lambda e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}}C_n^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\lambda)e^{\alpha\lambda^*-\alpha^*\lambda} \qquad \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

Dans la mesure où $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_{Fock}$, il est possible de reprendre l'expression (B.7) de $C_n^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\lambda)$ pour réécrire (B.9) :

$$
\begin{aligned}
W_{(\alpha)}^{[|\psi\rangle\langle\psi|]} &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{\min\limits_{(m,n)}}\frac{\sqrt{m!n!}(-1)^{n-k}}{(m-k)!(n-k)!k!}\iint_{\mathbb{C}} d^2\lambda\ \lambda^{*n-k}\lambda^{m-k}e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}+\alpha\lambda^*-\alpha^*\lambda}\\
&= \frac{1}{\pi^2}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{\min\limits_{(m,n)}}\frac{\sqrt{m!n!}(-1)^{m+n}}{(m-k)!(n-k)!k!}\frac{\partial^{m-k}}{\partial\alpha^{*m-k}}\frac{\partial^{n-k}}{\partial\alpha^{n-k}}\iint_{\mathbb{C}} d\lambda^2\ e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}+\alpha\lambda^*-\alpha^*\lambda} \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}
$$

Pour calculer cette dernière intégrale, décomposons λ selon ses parties réelle x et imaginaire p : $\lambda = x + ip$ / $(x,p) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que $d^2\lambda = dxdp$:

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{C}} d^2\lambda\ e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}+\alpha\lambda^*-\alpha^*\lambda} &= \iint_{\mathbb{R}^2} dxdp\ e^{-\frac{x^2+p^2}{2}+(\alpha-\alpha^*)x-i(\alpha+\alpha^*)p}\\
&= \int_{\mathbb{R}} dx\ e^{-\frac{x^2}{2}+(\alpha-\alpha^*)x}\int_{\mathbb{R}} dp\ e^{-\frac{p^2}{2}-i(\alpha+\alpha^*)p}\\
&= e^{\frac{(\alpha-\alpha^*)^2}{2}}e^{\frac{(\alpha+\alpha^*)^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} dx\ e^{-\frac{[x-(\alpha-\alpha^*)]^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} dp\ e^{-\frac{[p+i(\alpha+\alpha^*)]^2}{2}}\\
&= 2\pi e^{-2\alpha^*\alpha} \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

Ainsi, par (B.11) dans (B.10) on a :

$$
\begin{aligned}
W_{(\alpha)}^{[|\psi\rangle\langle\psi|]} &= \frac{2}{\pi}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{\min\atop(m,n)}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{(m\text{-}k)!(n\text{-}k)!k!}\frac{\partial^{n\text{-}k}}{\partial\alpha^{n\text{-}k}}\frac{\partial^{m\text{-}k}}{\partial\alpha^{*m\text{-}k}}\ e^{\text{-}2\alpha^*\alpha} \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{\min\atop(m,n)}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{(m\text{-}k)!(n\text{-}k)!k!}\frac{\partial^{n\text{-}k}}{\partial\alpha^{n\text{-}k}}\left[(\text{-}2\alpha)^{m\text{-}k}\ e^{\text{-}2\alpha^*\alpha}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{\min\atop(m,n)}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{(m\text{-}k)!(n\text{-}k)!k!}\sum_{l=0}^{n\text{-}k}C_{n\text{-}k}^{l}\left(\frac{\partial^l}{\partial\alpha^l}(\text{-}2\alpha)^{m\text{-}k}\right)\left(\frac{\partial^{n\text{-}k\text{-}l}}{\partial\alpha^{n\text{-}k\text{-}l}}e^{\text{-}2\alpha^*\alpha}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{\min\atop(m,n)}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{(m\text{-}k)!(n\text{-}k)!k!}\sum_{l=0}^{n\text{-}k}C_{n\text{-}k}^{l}\frac{(m\text{-}k)!(\text{-}2)^l}{(m\text{-}k\text{-}l)!}(\text{-}2\alpha)^{m\text{-}k\text{-}l}(\text{-}2\alpha^*)^{n\text{-}k\text{-}l}e^{\text{-}2\alpha^*\alpha} \\
&= \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{\min\atop(m,n)}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{k!}\sum_{l=0}^{n\text{-}k}\frac{(\text{-}2)^l(\text{-}2\alpha)^{m\text{-}k\text{-}l}(\text{-}2\alpha^*)^{n\text{-}k\text{-}l}}{l!(m\text{-}k\text{-}l)!(n\text{-}k\text{-}l)!}
\end{aligned}
$$

Ici, nous devons différencier les cas où $m = n$, $m < n$ et $m > n$:

$$
\begin{aligned}
W_{(\alpha)}^{[|\psi\rangle\langle\psi|]} &= \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}|\gamma_n|^2\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\sum_{l=0}^{n\text{-}k}\frac{(\text{-}2)^l(4|\alpha|^2)^{n\text{-}k\text{-}l}}{l!(n\text{-}k\text{-}l)^2!} \\
&+ \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\m<n}}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{m}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{k!}\sum_{l=0}^{n\text{-}k}\frac{(\text{-}2)^l(\text{-}2\alpha)^{m\text{-}k\text{-}l}(\text{-}2\alpha^*)^{n\text{-}k\text{-}l}}{l!(m\text{-}k\text{-}l)!(n\text{-}k\text{-}l)!} \\
&+ \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\m>n}}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{k!}\sum_{l=0}^{n\text{-}k}\frac{(\text{-}2)^l(\text{-}2\alpha)^{m\text{-}k\text{-}l}(\text{-}2\alpha^*)^{n\text{-}k\text{-}l}}{l!(m\text{-}k\text{-}l)!(n\text{-}k\text{-}l)!} \\
&= \sum_{m=n}(\alpha)+\sum_{m<n}(\alpha)+\sum_{m>n}(\alpha) \qquad \text{(B.12)}
\end{aligned}
$$

Effectuons les changements de variable $k' = m - k$ dans $\sum_{m<n}$ et $k' = n - k$ dans $\sum_{m>n}$ et $\sum_{m=n}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=n}(\alpha) &= \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}|\gamma_n|^2\sum_{k'=0}^{n}\frac{n!}{(n-k')!}\sum_{l=0}^{k'}\frac{(\text{-}2)^l(4|\alpha|^2)^{k'\text{-}l}}{l!(k'\text{-}l)^2!} \\
\sum_{m<n}(\alpha) &= \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\m<n}}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k'=0}^{m}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{(m-k')!}\sum_{l=0}^{n\text{-}m+k'}\frac{(\text{-}2)^l(\text{-}2\alpha)^{k'\text{-}l}(\text{-}2\alpha^*)^{n\text{-}m+k'\text{-}l}}{l!(k'\text{-}l)!(n\text{-}m+k'\text{-}l)!} \\
\sum_{m>n}(\alpha) &= \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\m>n}}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k'=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{(n-k')!}\sum_{l=0}^{k'}\frac{(\text{-}2)^l(\text{-}2\alpha)^{m\text{-}n+k'\text{-}l}(\text{-}2\alpha^*)^{k'\text{-}l}}{l!(m\text{-}n+k'\text{-}l)!(k'\text{-}l)!}
\end{aligned}
$$

Dans $\sum_{m<n}(\alpha)$, la présence de $(k'\text{-}l)!$, défini uniquement si $k' > l$, implique de changer, dans la troisème somme, la borne supérieur $n - m + k'$ en k'. On observe alors une certaine symétrie dans les deux fonctions $\sum_{m\neq n}(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{m<n}(\alpha) &= \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\m<n}}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k'=0}^{m}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{(m-k')!}\sum_{l=0}^{k'}\frac{(\text{-}2)^l(\text{-}2\alpha^*)^{n\text{-}m}(4|\alpha|^2)^{k'\text{-}l}}{l!(k'\text{-}l)!(n\text{-}m+k'\text{-}l)!} \\
\sum_{m>n}(\alpha) &= \frac{2e^{\text{-}2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\m>n}}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n\sum_{k'=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}(\text{-}1)^{m+n}}{(n\text{-}k')!}\sum_{l=0}^{k'}\frac{(\text{-}2)^l(\text{-}2\alpha)^{m\text{-}n}(4|\alpha|^2)^{k'\text{-}l}}{l!(m\text{-}n+k'\text{-}l)!(k'\text{-}l)!}
\end{aligned}
$$

Dès lors, inverser m et n dans $\sum_{m<n}(\alpha)$ permet de regrouper les deux fonctions $\sum_{m\neq n}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{m\neq n}(\alpha) &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\ m>n}}^{+\infty}\gamma_m^*\gamma_n(2\alpha)^{m-n}+\gamma_m\gamma_n^*(2\alpha^*)^{m-n}\sum_{k'=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}}{(n-k')!}\sum_{l=0}^{k'}\frac{(-2)^l(4|\alpha|^2)^{k'-l}}{l!(m-n+k'-l)!(k'-l)!}\\
&= \frac{4e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\ m>n}}^{+\infty}\mathcal{R}e\Big(\gamma_m^*\gamma_n(2\alpha)^{m-n}\Big)\sum_{k'=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}}{(n-k')!}\sum_{l=0}^{k'}\frac{(-2)^l(4|\alpha|^2)^{k'-l}}{l!(m-n+k'-l)!(k'-l)!}
\end{aligned}$$

Et d'écrire :

$$\begin{aligned}
W_{(\alpha)}^{[|\psi\rangle\langle\psi|]} &= \sum_{m=n}(\alpha)+\sum_{m\neq n}(\alpha)\\
&= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}|\gamma_n|^2\sum_{k'=0}^{n}\frac{n!}{(n-k')!}\sum_{l=0}^{k'}\frac{(-2)^l(4|\alpha|^2)^{k'-l}}{l!(k'-l)^2!}\\
&+ \frac{4e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\ m>n}}^{+\infty}\mathcal{R}e\Big(\gamma_m^*\gamma_n(2\alpha)^{m-n}\Big)\sum_{k'=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}}{(n-k')!}\sum_{l=0}^{k'}\frac{(-2)^l(4|\alpha|^2)^{k'-l}}{l!(m-n+k'-l)!(k'-l)!}
\end{aligned}$$

Nous constatons que $W^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}(\alpha)\in\mathbb{R}$, comme attendu. Ici, nous effectuons le changement d'indice $l'=k'-l$ et réarrangeons l'ordre des sommes sur k' et l' :

$$\begin{aligned}
W_{(\alpha)}^{[|\psi\rangle\langle\psi|]} &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}|\gamma_n|^2\sum_{l'=0}^{n}\frac{n!(4|\alpha|^2)^{l'}}{l'^2!}\sum_{k'=l'}^{n}\frac{(-2)^{k'-l'}}{(n-k')!(k'-l')!}\\
&+ \frac{4e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\ m>n}}^{+\infty}\mathcal{R}e\Big(\gamma_m^*\gamma_n(2\alpha)^{m-n}\Big)\sum_{l'=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}(4|\alpha|^2)^{l'}}{l'!(m-n+l')!}\sum_{k'=l'}^{n}\frac{(-2)^{k'-l'}}{(n-k')!(k'-l')!}
\end{aligned}$$

Nous effectuons ensuite les changements d'indice $l'=l$ et $k=k'-l'$ et multiplions l'expression par $(n\text{-}l)!/(n\text{-}l)!$ afin de faire apparaitre un binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
W_{(\alpha)}^{[|\psi\rangle\langle\psi|]} &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}|\gamma_n|^2\sum_{l=0}^{n}\frac{n!(4|\alpha|^2)^{l}}{l^2!(n-l)!}\sum_{k=0}^{n-l}\frac{(n-l)!(-2)^k}{k!(n-l-k)!}\\
&+ \frac{4e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\ m>n}}^{+\infty}\mathcal{R}e\Big(\gamma_m^*\gamma_n(2\alpha)^{m-n}\Big)\sum_{l=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}(4|\alpha|^2)^{l}}{l!(m-n+l)!(n-l)!}\sum_{k=0}^{n-l}\frac{(n-l)!(-2)^k}{k!(n-l-k)!}\\
&= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}|\gamma_n|^2\sum_{l=0}^{n}\frac{n!(4|\alpha|^2)^{l}}{l^2!(n-l)!}(-1)^{n-l}\\
&+ \frac{4e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{\substack{m,n=0\\ m>n}}^{+\infty}\mathcal{R}e\Big(\gamma_m^*\gamma_n(2\alpha)^{m-n}\Big)\sum_{l=0}^{n}\frac{\sqrt{m!n!}(4|\alpha|^2)^{l}}{l!(m-n+l)!(n-l)!}(-1)^{n-l}
\end{aligned}$$

Finalement, la distribution de Wigner a pour expression :

$$W_{(\alpha)}^{[|\psi\rangle\langle\psi|]}=\frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n|\gamma_n|^2\mathcal{L}_n(4|\alpha|^2)+2\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\mathcal{R}e\Big(\gamma_n^*\gamma_m(2\alpha)^{n-m}\Big)\tilde{\mathcal{L}}_{m,n}(4|\alpha|^2)\right] \tag{B.13}$$

où $\mathcal{L}_n(x)$ est le polynôme de Laguerre d'ordre n et $\tilde{\mathcal{L}}_{m,n}(x)$ un polynôme apparenté à $\mathcal{L}_n(x)$ défini chacun par :

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l\frac{n!}{l^2!(n-l)!}x^l \tag{B.14}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{m,n}(x) = \sum_{l=0}^{m}(-1)^l\frac{\sqrt{m!n!}}{l!(n\text{-}m+l)!(m\text{-}l)!}x^l \tag{B.15}$$