

Devoir à la maison à rendre le Mercredi 4 Mars 2009

Il est inutile de redémontrer les résultats vus en cours ou en PC.

1 Réflexion d'un faisceau de neutrons sur un ferromagnétique.

Un ferromagnétique est un matériau avec un moment magnétique interne permanent non nul (un aimant!) générant un champ magnétique interne que nous noterons B_0 . On se propose d'étudier la réflexion d'un jet de neutrons monocinétiques arrivant sous incidence normale sur un tel matériau. On appelle Ox la direction de propagation du jet incident, yOz la surface du matériau ferromagnétique, qui occupe toute la région $x > 0$. Soit E l'énergie de chaque neutron incident, m leur masse. L'état de moment magnétique du neutron est décrit dans un espace de Hilbert de dimension 2 (base $(|+z\rangle, |-z\rangle)$) avec $\hat{\mu}_z|\pm z\rangle = \pm\mu_0|\pm z\rangle$. L'énergie potentielle des neutrons est la somme de deux termes :

- le premier correspond à l'interaction avec les nucléons du matériau; on le représente phénoménologiquement par un potentiel $V(x)$ défini par $V(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $V(x) = V_0$ pour x positif.
- le deuxième terme correspond à l'interaction du moment magnétique de chaque neutron avec le champ magnétique interne \vec{B}_0 (uniforme et parallèle à Oz). Ce terme est décrit par l'opérateur $\hat{W} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$ pour x positif. On notera $\hbar\omega_0 = -2\mu_0 B_0$. On se limitera au cas : $0 < \hbar\omega_0/2 < V_0$.

1. Déterminer les états stationnaires de la particule correspondant à une impulsion incidente positive et à un moment magnétique, soit parallèle, soit antiparallèle à Oz . Justifier qu'on peut factoriser les solutions sous la forme : $|\psi^\pm(E)\rangle = |\psi(E)\rangle \otimes (\alpha_\pm|\pm z\rangle)$. On considèrera trois cas selon les valeurs relatives de E et de $V_0 \pm \hbar\omega_0/2$.
2. On suppose dans cette question que $V_0 - \hbar\omega_0/2 < E < V_0 + \hbar\omega_0/2$. Le faisceau incident de neutrons est non-polarisé : la moitié des neutrons du faisceau incident sont dans l'état $|+\rangle_z$, l'autre moitié dans l'état $|-\rangle_z$. Calculer le taux de polarisation du faisceau réfléchi, défini comme $T = (|c_+|^2 - |c_-|^2)/(|c_+|^2 + |c_-|^2)$, où c_+ (c_-) sont les coefficients de réflexion en amplitude des neutrons dans l'état initial $|+\rangle_z$ ($|-\rangle_z$). Pourriez-vous trouver une application pratique du résultat précédent ?
3. On se replace dans le cas général où l'énergie E est positive et quelconque. Le moment magnétique des neutrons incidents pointe dans la direction Ox . Calculer la valeur moyenne des trois composantes du moment magnétique des neutrons réfléchis. En déduire sa direction selon les valeurs relatives de E et de $V_0 \pm \hbar\omega_0/2$.

2 L'effet Zeeman orbital

On considère un atome d'hydrogène placé dans un champ magnétique uniforme B orienté le long de l'axe Oz : $\vec{B} = B\vec{u}_z$, où \vec{u}_z est le vecteur unitaire selon Oz . On s'intéresse dans cet exercice à la perturbation induite par ce champ magnétique sur les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. On néglige tout effet lié au spin de l'électron ou du proton.

On modélise l'interaction entre l'atome et le champ magnétique en utilisant l'analogie classique d'une boucle de courant. Cette analogie revient à poser la proportionnalité entre l'opérateur moment cinétique de l'électron \vec{L} et son opérateur moment magnétique $\vec{\mu}$:

$$\hat{\mu} = \frac{-q}{2m_e} \hat{L} \quad (1)$$

où $-q$ est la charge de l'électron et m_e sa masse. L'hamiltonien décrivant l'interaction magnétique s'écrit :

$$\hat{H}_{\text{mag}} = -\hat{\mu} \cdot \vec{B} \quad (2)$$

1. Quelle est (à l'ordre 1 en B) la modification de l'état fondamental $1s$ de l'atome d'hydrogène, d'énergie $E = -E_I$, avec $E_I = 13.6$ eV ?
2. Quelle est (à l'ordre 1 en B) la modification du premier niveau excité, d'énergie $E = -E_I/4$? On rappellera la dégénérescence de ce niveau d'énergie en absence de champ magnétique. Les dégénérescences sont-elles complètement levées par la présence du champ B ?
3. Comment ces résultats sont-ils modifiés si le champ \vec{B} est aligné avec l'axe Ox ?
4. On prend $B = 0.1$ T. Estimer les déplacements d'énergie dus au champ magnétique. Comment ces déplacements se comparent-ils à l'énergie typique du problème coulombien E_I ? Justifier l'utilisation de la théorie des perturbations.
5. Quand un atome d'hydrogène est préparé dans un des états $|n = 2, \ell = 1, m = 0, \pm 1\rangle$, il peut tomber sur l'état fondamental $|n = 1, \ell = 0, m = 0\rangle$ en émettant un photon d'énergie $3E_I/4$. Comment cette *raie spectrale* est-elle modifiée quand on applique le champ magnétique ?
6. **Question facultative.** Le véritable hamiltonien d'un électron de charge $-q$ plongé à la fois dans le potentiel coulombien $-e^2/r$ et le champ magnétique \vec{B} s'écrit en fait :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\vec{p}} + q\vec{\hat{A}})^2}{2m_e} - \frac{e^2}{\hat{r}}, \quad (3)$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur associé au champ magnétique, par exemple $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}/2$. En se limitant aux termes du premier ordre en B , montrer que $\hat{H} \simeq \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{mag}}$ ce qui justifie l'utilisation de l'analogie avec une boucle de courant.