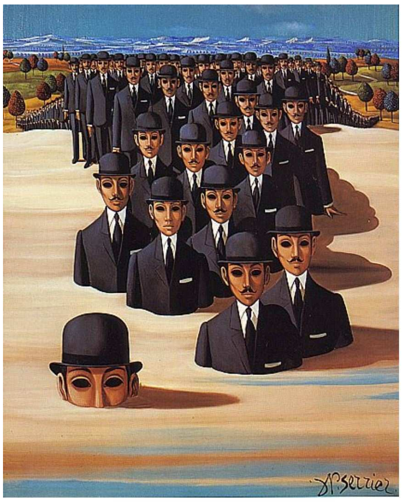
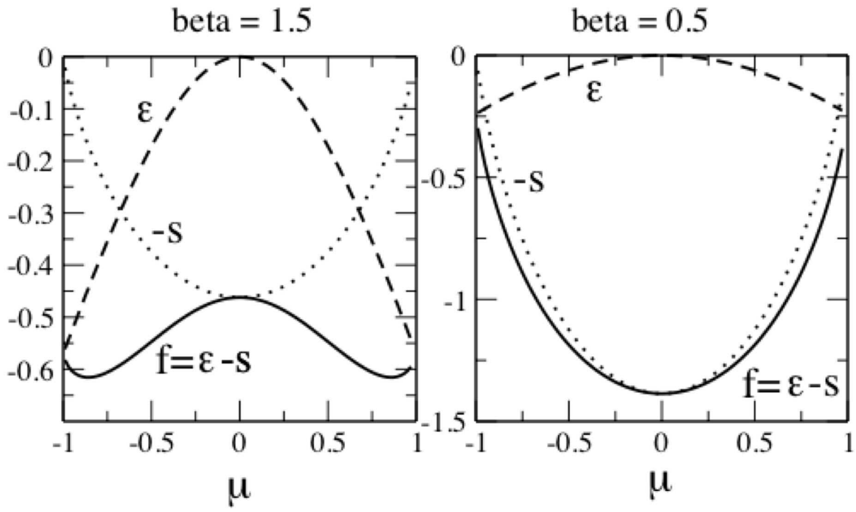
Une introduction à la physique statistique: Dynamique d'opinion
(sous-titre: tout le cours en une seule PC).

Cet exercice étudie la modélisation de la dynamique des opinions dans un groupe. On retrouve, avec un vocabulaire différent, beaucoup de concepts et techniques de la physique statistique. Les formules suivantes pourront être utiles: (on notera "ln" le logarithme népérien):

$$\text{Formule de Stirling}: \quad ln(N!) = Nln(N) - N + O(ln(N)), \quad \text{et:} \quad argth(x) = (1/2)ln[(1+x)/(1-x)].$$





1. Distribution binomiale et sa limite gaussienne. On considère un groupe de N personnes répondant à un sondage quotidien proposant le choix entre deux opinions A et B. Le premier jour, on suppose que les deux choix sont équiprobables. Soit $a = N_A/N$ la fraction des sondés répondant A.

a) Montrer que le nombre $W(a)$ de configurations de réponse ("micro-états") permettant d'obtenir une valeur donnée de a s'écrit pour N large:

$$W(a) = exp[Ng(a)], \quad \text{avec:} \quad g(a) \simeq -aln(a) - (1-a)ln(1-a)$$

b) Montrer que la probabilité $P(a)$ qu'une fraction (a) des sondés ait répondu A tend pour $N >> 1$ vers une distribution gaussienne:

$$P(a) = P(\overline{a})exp\left[-(a-\overline{a})^2/2\sigma_a^2\right], \quad \text{avec:} \quad \sigma_a/\overline{a} = 1/\sqrt{N}$$

2. Champ moyen. Transition de phase. On s'intéresse désormais aux réponses des jours suivants. Au jour "t+1", les sondés ont accès à "l'opinion moyenne" de la veille, soit $a(t) = N_A(t)/N$. Cet avis influence les choix (effet "mouton de Panurge") de sorte que les sondés adoptent la réponse A avec une probabilité $p = f(a(t))$ où la fonction f est donnée par $f(a) = \frac{1}{2}[1 + \text{th}\{\beta(2a-1)\}]$.

a) Commentez le choix de la fonction f et l'effet du paramètre β.

b) Montrer que l'opinion moyenne $a(t)$ vérifie l'équation d'évolution $a(t+1) = f(a(t))$. Quels sont les points fixes a_{eq} de cette évolution? Montrer que la situation est différente suivant que β est supérieur ou inférieur à une valeur critique β_C. Tracer la (les) courbe(s) donnant a_{eq} en fonction de β. Commenter la stabilité des différentes solutions a_{eq}.

3. Dynamique et probabilité de transition. On caractérise le choix de la personne k au jour t par la variable binaire $s_k(t)$ donnée par: $s_k(t) = 1$ (ou -1) si la personne k fait le choix A (ou B) et on note $\mu(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} s_k(t)$, de sorte que la fraction des gens choisissant A au jour t est donnée par $a(t) = (\mu(t)+1)/2$.

Montrer que la probabilité conditionnelle de passer d'une configuration $S = (s_1, ..., s_N)$ à une configuration $S' = (s_1^{'}, ..., s_N^{'})$ entre les jours t et (t+1) s'écrit:

$$T_{S\to S'} = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\left[1 + s_k^{'}\mathrm{th}(\beta\mu(t))\right]\right) = \frac{e^{\beta N\mu\mu'}}{[2ch(\beta\mu)]^N}$$

où $\mu = \mu(t)$ et $\mu' = \mu(t+1)$. On remarquera que si $s = \pm 1$ et u est un réel quelconque, on a: $\exp(us) = \mathrm{ch}(u)[1 + s\ \mathrm{th}(u)]$.

4. Renversement d'opinion. Notons $T_{t+1}(\mu'/\mu)$ la probabilité conditionnelle pour que l'opinion moyenne au jour (t+1) soit $\mu(t+1) = \mu'$ alors que $\mu(t) = \mu$ le jour précédent. Calculer le rapport:

$$R = \frac{T_{t+1}(\mu' = -\mu_{eq}/\mu = +\mu_{eq})}{T_{t+1}(\mu' = \mu_{eq}/\mu = +\mu_{eq})}.$$

où μ_{eq} correspond à un des points fixes a_{eq} trouvé précédemment. Qu'en déduisez vous ?

6) Equation maîtresse. Distribution à l'équilibre. On note $P_t(S)$ la probabilité d'avoir la configuration S au jour t. Interpréter l'équation d'évolution suivante en terme d'équation bilan:

$$P_{t+1}(S') = \sum_{S} P_t(S) T_{S\to S'}\ .$$

Montrer que $P_{eq}(S) \simeq (2ch(\beta\mu))^N$ est solution stationaire ("à l'équilibre") de cette équation.

5. Soit $\rho(\mu)$ la probabilité pour que l'opinion moyenne soit égale à μ.

- Ecrire $\rho(\mu)$ en fonction de $W(\mu)$ et P_{eq}, où $W(\mu)$ est le nombre de configurations S compatibles avec μ.
- Comparer les variations de $W(\mu)$ et P_{eq} en fonction de μ.
- Montrer que pour $N >> 1$, on peut écrire: $\rho(\mu) = \rho_0 exp[-\beta N f(\mu)]$, avec:

$$f(\mu) = \epsilon(\mu) - s(\mu), \quad \epsilon(\mu) = -\frac{1}{\beta}ln[2ch(\beta\mu)] \quad \text{et} \quad s(\mu) = \frac{1}{\beta}\left[-(\frac{1+\mu}{2})ln(\frac{1+\mu}{2}) - (\frac{1-\mu}{2})ln(\frac{1-\mu}{2})\right]$$

- Trouver les valeurs les plus probables de μ à l'équilibre. Commenter.
- On représente ci-dessus l'allure de $\epsilon(\mu)$, $-s(\mu)$ et $f(\mu)$ pour deux valeurs de β. Commenter.