PC 2 – Cours de physique - mécanique quantique – Xavier Blase

A. Le théorème d'Ehrenfest. L'évolution dans le temps de la valeur moyenne d'une observable est une loi importante qui permet en particulier de mieux appréhender les différences entre mécanique quantique et mécanique classique. Ainsi, l'étude de l'évolution temporelle de la valeur moyenne de l'opérateur position sur un paquet d'onde (le "centre de la particule") permet de construire l'analogue quantique des équations de Newton. Ce théorème démontre de nouveau l'importance des commutateurs et permet d'introduire des "lois de conservation" de façon élégante.

1) **Démonstration.** Une quantité physique A (une observable) est associée à un opérateur quantique $\hat{A}$ de valeur moyenne $\langle A\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ sur un état $|\psi\rangle$ d'un système quantique décrit par un Hamiltonien $\hat{H}$. Démontrer que:

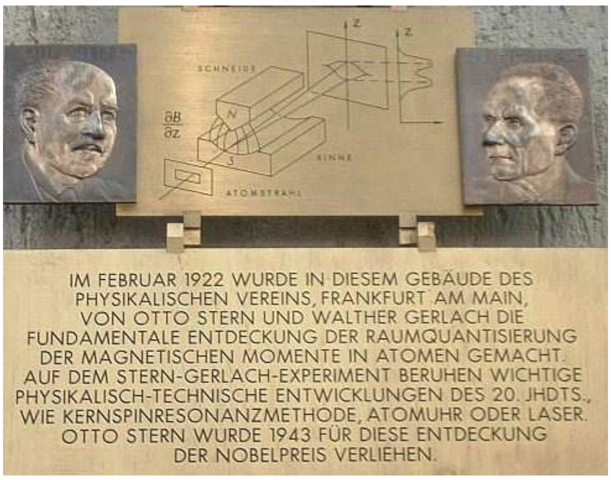
$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|[\hat{A},\hat{H}]|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}|\psi\rangle$$

2) **Applications aux opérateurs position et impulsion.**

- En déduire les lois d'évolution de la valeur moyenne de l'opérateur position $\hat{x}$ et impulsion $\hat{p}_x$ dans un système à une dimension pour une particule dans un potentiel V(x).
- Comparer aux équations de Newton classique. Le centre d'un paquet d'onde obéit-il aux lois de la mécanique classique ? Discuter qualitativement le cas de la "barrière tunnel" $V(x) = ax^4 - bx^2$ (a et b réels positifs).

3) **Lois de conservation.** Montrer que si un état $|\psi\rangle$ est normé initialement, il le restera dans le temps (conservation de la probabilité). Que dire de l'énergie d'un système isolé ? De l'impulsion d'une particule dans un potentiel constant ?

B. L'expérience de Stern et Gerlach. La précession de Larmor par le théorème d'Ehrenfest.



Nous allons étudier le problème d'un moment magnétique $\vec{\mu}$ soumis à un champ magnétique d'amplitude B_0 orienté selon $+\vec{z}$. On rappelle l'expression des opérateurs $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$ et $\hat{\mu}_z$ dans la base des états propres $|+>_z$ et $|->_z$ (de valeurs propres $\pm\mu_0$) de l'opérateur $\hat{\mu}_z$ associé à l'observable "composante du moment magnétique atomique selon l'axe $\vec{z}$."

$$\hat{\mu}_z = \mu_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{\mu}_x = \mu_0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mu}_y = \mu_0\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

En définissant l'opérateur vectoriel: $\vec{\hat{\mu}} = (\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z)$, le hamiltonien quantique s'écrit: $\hat{H} = -\vec{B}_0 \cdot \vec{\hat{\mu}} = -B_0 \hat{\mu}_z$.

1) On suppose que l'on veut préparer initialement notre système dans un des états propres de l'opérateur $\hat{\mu}_\theta = \vec{\hat{\mu}} \cdot \vec{u}_\theta$ associé à l'observable "composante du moment magnétique atomique le long du vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$", où le vecteur $\vec{u}_\theta = (sin\theta)\hat{x} + (cos\theta)\hat{z}$ est repéré par l'angle θ dans le plan xOz (voir figure ci-dessous).

Ecrire la matrice associée à l'opérateur $\hat{\mu}_\theta$ dans la base $(|+>_z, |->_z)$. Trouver ses valeurs propres et vecteurs propres.

2) On suppose qu'à l'instant t=0, le moment magnétique de notre système est préparé dans l'état propre de $\hat{\mu}_\theta$ de valeur propre $+\mu_0$. Comment en pratique "préparer" un tel état ? Quel est l'état du système à un instant t ultérieur ? On posera $\hbar\omega_0 = -2\mu_0 B_0$.

3) Calculer les valeurs moyennes en fonction du temps de $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$ sur l'état défini en question 2). Interpréter le résultat.

5) Retrouver le résultat précédent à l'aide du théorème d'Ehrenfest. On rappelle les relations de commutations:

$$\vec{\hat{\mu}} \times \vec{\hat{\mu}} = 2i\mu_0 \vec{\hat{\mu}}$$