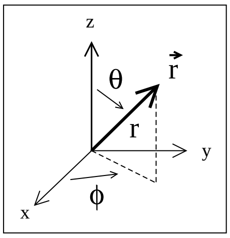
Moment cinétique. Rappel. L'utilisation des opérateurs $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ permet de montrer (pages 208-210 du cours) que si $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ est une observable telle que $\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{J}} = i\hbar\hat{\mathbf{J}}$, alors:

- les valeurs propres de $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ s'écrivent l(l+1)$\hbar^2$ où l est entier ou demi-entier, positif ou nul.
- les valeurs propres de $\hat{J}_z$ s'écrivent $m\hbar$ où m prend les (2l+1) valeurs (-l,-l+1, ... , l-1,l).
- si de plus $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}}$ est un moment cinétique orbital, $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$, alors l est nécessairement entier et les vecteurs propres sont les harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta,\phi) = F_{lm}(\theta)e^{im\phi}$.

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}, \qquad \hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{tg\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right), \qquad \text{Laplacien:} \quad \Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{r^2\hbar^2}\hat{L}^2\psi$$



A. Mouvement dans un potentiel central. Nous étudions le mouvement d'une particule dans un potentiel central tel que $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|) = V(r)$.

1) En utilisant les coordonnées cartésiennes, démontrer que les opérateurs $\hat{L}_z, \hat{L}_x, \hat{L}_y$ et $\hat{L}^2$ commutent avec l'hamiltonien. Justifier que ces relations de commutation sont triviales en coordonnées sphériques. Quelles conséquences tirer de ces relations de commutation (rappeler le théorème d'Ehrenfest) ?

2) Justifier que pour un potentiel central on peut écrire les solutions de l'équation aux valeurs propres sous la forme suivante (séparation des variables radiales et angulaires): $\psi_{klm}(r,\theta,\phi) = R_{kl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ (l'utilisation des deux indices (k,l) pour la fonction radiale R_{kl} sera justifiée ci-dessous). Les valeurs propres E du Hamiltonien dépendent-elles de l et de m ? (on tirera profit de l'action des opérateurs $L_\pm$).

3) On pose $u_{kl}(r) = rR_{kl}(r)$. Quelle équation différentielle est vérifiée par $u_{kl}(r)$? Montrer que cette équation fait apparaître un potentiel effectif: $V_{eff}(r) = V(r) + V_l(r)$, où V_l(r) dépend de l. Quelle est l'interprétation classique de ce terme V_l ?

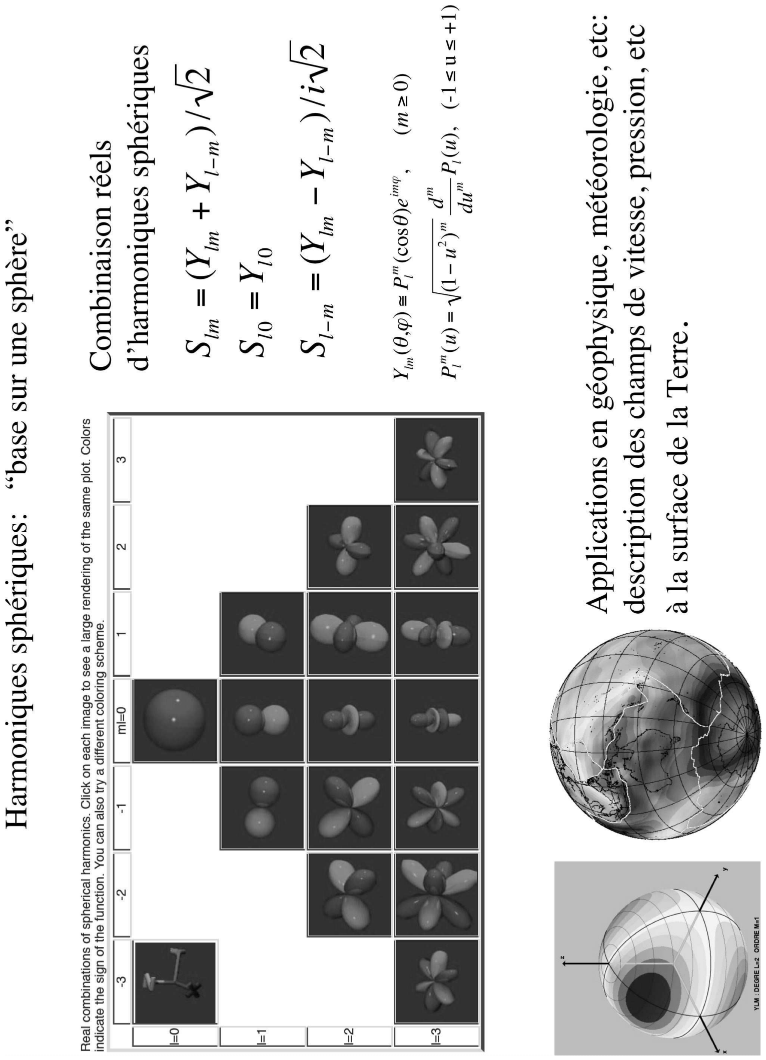
4) **Soit une fonction d'onde donnée: Introduction aux potentiels effectifs ("prelims" du MIT)** On suppose une particule soumise à un potentiel central V(r) tel que $V(r \to \infty) \to 0$. Un des états quantiques propres de ce système nous est donné par: $\psi(\vec{r}) = Cr^s e^{-\alpha r} cos(\theta)$, avec $s = \sqrt{3}$. Trouver (a) les nombres quantiques (m,l) pour cet état, (b) son énergie E, et (c) le potentiel V(r).

B. Relation entre rotations et moment cinétique. Considérons l'opérateur rotation $\hat{R}_{\hat{u}}(d\alpha)$ appliqué à une fonction $f(\mathbf{r})$. Après vous être convaincu(e) que: $[\hat{R}_{\hat{u}}(d\alpha)f](\mathbf{r}) = f(R_{\hat{u}}^{-1}(d\alpha)\mathbf{r})$ montrer que:

$$\hat{R}_{\hat{u}}(d\alpha) = \hat{I} - \frac{i}{\hbar}d\alpha\,\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{u} + O((d\alpha)^2),$$

On en déduit que les relations de commutation du moment cinétique: $\vec{\hat{L}} \times \vec{\hat{L}} = i\hbar\vec{\hat{L}}$ découlent de la non commutation des rotations d'axes différents. On établit[1] en effet la relation suivante (dans le cas des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ pour exemple):

$$R_{\hat{x}}(d\alpha)R_{\hat{y}}(d\alpha) - R_{\hat{y}}(d\alpha)R_{\hat{x}}(d\alpha) = R_{\hat{z}}((d\alpha)^2) - I + O((d\alpha)^3)$$



[1] On peut établir en premier que: $R_{\hat{u}}(d\alpha)(\mathbf{OM}) = \mathbf{OM} + d\alpha\,\hat{u} \times \mathbf{OM} + \frac{1}{2}d\alpha\,\hat{u} \times [d\alpha\,\hat{u} \times \mathbf{OM}] + O((d\alpha)^3)$.