Ensemble canonique: applications (suite)

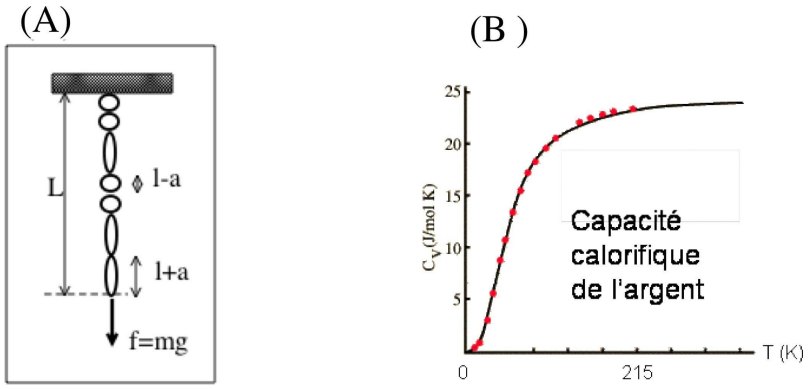

FIG. 1:

A. Elasticité d'une fibre. La fibre est constituée de chaînes qui sont elles-mêmes formées par une séquence de maillons identiques, liés les uns aux autres. Chacun des maillons peut cependant être dans divers états quantiques, à chacun desquels correspond une longueur du maillon. Ce sont les transitions entre ces états qui modifient la longueur totale de la fibre, et qui sont donc à l'origine de son élasticité.

Pour étudier l'élasticité de la fibre, nous la schématisons par le modèle suivant. Elle comprend N éléments (N grand), dont chacun peut apparaître dans deux états, un état court de longueur $l - a$, et un état long de longueur $l + a$. On suppose pour simplifier que les énergies des deux états sont les mêmes, et que l'interaction d'accrochage entre maillons ne dépend pas de leur état. Moyennant un choix convenable pour l'origine des énergies, on peut donc supposer que l'énergie totale de la chaîne est nulle dans chacun de ses 2^N microétats possibles. La chaîne est placée dans un thermostat à température T. Sa longueur totale L est maintenue en appliquant une tension f à l'extrémité, par exemple en accrochant un poids au bout de la fibre.

1. Obtenir l'équation d'état de la fibre, c'est-à-dire la relation entre f, L et T. On considèrera le système (fibre+masse) dans l'ensemble canonique.

2. Poser les principes du calcul dans l'ensemble micro-canonique permettant de retrouver cette équation d'état.

3. Etudier le comportement de la longueur en fonction de la tension à température donnée. Comment varie le module d'élasticité en fonction de la température? Que se passe-t-il si l'on réchauffe la fibre à tension donnée?

B. Capacité calorifique des solides dans le modèle d'Einstein. La capacité calorifique des solides est associée à l'énergie stockée par les modes de vibration du réseau atomique. Dans le modèle d'Einstein (1907), on modélise les vibrations du réseau cristallin en supposant que chaque atome est un oscillateur 3D quantique isotrope de pulsation ω_E.

Calculer la fonction de partition Z_N, l'énergie moyenne et la capacité calorifique dans ce modèle. Discuter la limite haute température.

Comparer au résultat classique (Dulong et Petit, 1819).

C. Fluctuations et constante de raideur d'un ressort.

Soit un ressort vertical de raideur α auquel est suspendu une masse m (on négligera l'effet de la pesanteur). Montrer que l'analyse de l'amplitude des fluctuations thermiques de l'allongement x du ressort permet de mesurer α. On montrera pour cela que la variance s'écrit $\sigma_x^2 = k_B T/\alpha$, où T la température.