PHY432a – PC 5 – Cours de physique - mécanique quantique

Xavier Blase, Institut Néel, Grenoble – xavier.blase@grenoble.cnrs.fr

Le mouvement d'une **particule chargée dans un champ magnétique** donne lieu à de nombreux effets quantiques importants. Citons, entre autres, l'effet Zeeman (déplacement des raix atomiques, Nobel 1902), l'effet Hall quantique (Nobel 1985) et quantique fractionnaire (Nobel 1998).

Un champ électromagnétique est défini par son potentiel scalaire $V(\mathbf{r},t)$ et potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ satisfaisant aux équations de Maxwell. Nous admettrons qu'en mécanique quantique, l'hamiltonien qui permet de décrire le comportement d'une charge q de masse m dans un tel champ est:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}},t))^2}{2m} + qV(\hat{\mathbf{r}},t)$$

Nous justifierons en complément que cet Hamiltonien préserve bien "l'invariance de jauge", c'est-à-dire conduit à des observables physiques invariantes sous changement de potentiel scalaire et vecteur préservant les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t) \qquad \text{et} \qquad V'(\vec{r},t) = V(\vec{r},t) - \frac{\partial\Lambda(\vec{r},t)}{\partial t}, \qquad \Lambda(\vec{r},t) \text{ quelconque.}$$

Préambule. Dans le cas où $\mathbf{A}$ et V sont statiques, montrer en considérant l'évolution temporelle de la valeur moyenne de l'opérateur position que l'opérateur $(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))$ est associé à la vitesse de groupe.

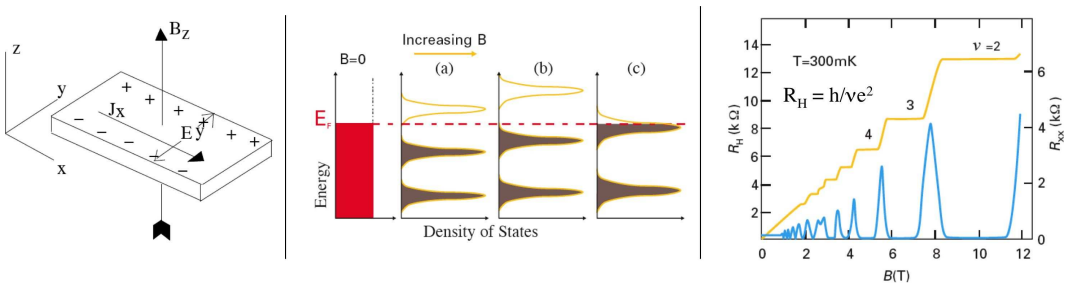
A. Niveaux d'énergie. Les niveaux de Landau (Lev Landau, physicien russe, prix Nobel 1962). Soit une particule de masse m et charge q dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$.

1) Montrer que les deux choix de jauge: $\mathbf{A} = Bx\mathbf{u}_y$ et $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$ conviennent.

2) On cherche à déterminer les niveaux d'énergie. On utilise la première jauge (jauge de Landau). Montrer qu'on peut écrire les fonctions d'onde propres sous la forme: $\psi(x,y,z) = e^{i(yk_y + zk_z)} f(x)$.

3) En déduire les énergies propres de la particule sous champ. Discuter la structure du spectre des énergies dans le cas d'un "plan" d'épaisseur L_z. Les niveaux d'énergie sont-ils dégénérés ?

Cette évolution des niveaux d'énergie sous champ permet de comprendre l'effet Hall quantique. On soumet un "ruban" de largeur L_y parcourue par un courant J_x à un champ magnétique constant perpendiculaire $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$. Dans une approche classique, on montre qu'il se développe en tension transverse V_y, dite tension de Hall, telle que: $R_H = V_y/J_x = B/ne$ (n densité surfacique de charge). Dans le cas quantique (échantillon de taille nanoscopique), on observe que la constante R_H n'est plus proportionnelle au champ mais présente des plateaux quand B augmente (voir figure). C'est l'apparition des niveaux de Landau qui permet de comprendre ce phénomène purement quantique.

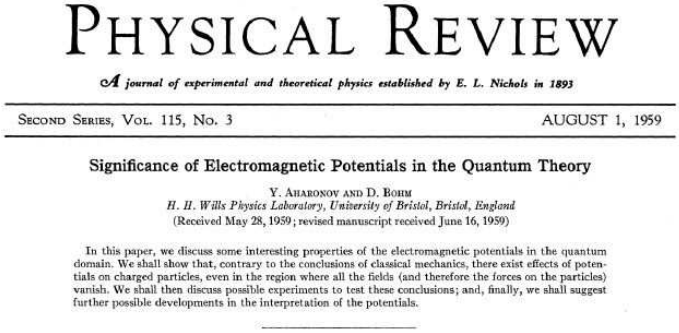


B. L'effet Bohm-Aharonov. On peut démontrer expérimentalement que le Hamiltonien dépend du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ en considérant le mouvement d'une particule libre dans une zone de l'espace où le champ magnétique est nul mais le potentiel vecteur non-nul (ce qui peut être réalisé en se plaçant à l'extérieur d'un solénoïde infini parcouru par un courant). On considerera $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ indépendant du temps (courant constant).

1) Montrer que si $\psi_0(\mathbf{r})$ est solution du Hamiltonien sans potentiel vecteur, alors: $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) exp\left[iq\mathcal{C}(\mathbf{r})/\hbar\right]$ est solution en présence du potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, avec $\mathcal{C}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$. Justifier que l'intégrale sur $\mathbf{A}$ ne dépend pas du chemin parcouru entre ses bornes (dans la zone d'espace où le champ est nul).

2) Pour cette particule libre en présence du potentiel vecteur, et $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ quelconques dans la région où le champ B est nul, trouver la relation entre $\psi(\mathbf{r}_1)$ et $\psi(\mathbf{r}_2)$.

3) On considère une expérience d'interférence de type fente d'Young (voir figure) dans laquelle un faisceau d'électrons est divisé en deux. Les deux faisceaux parcourent deux trajectoires ABF et ACF et interfèrent en F. Entre les deux trajectoires, on introduit un solénoïde. Montrer que la frange centrale brillante peut être éteinte et allumée par le champ magnétique bien que celui-ci soit rigoureusement nul sur la trajectoire des électrons. Montrer que la période en champ d'extinction de la frange centrale permet de mesurer le "quantum de flux" h/q.



PHYSICAL REVIEW

A journal of experimental and theoretical physics established by E. L. Nichols in 1893

SECOND SERIES, VOL. 115, No. 3 — AUGUST 1, 1959

Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory

Y. AHARONOV AND D. BOHM
H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Bristol, England
(Received May 28, 1959; revised manuscript received June 16, 1959)

In this paper, we discuss some interesting properties of the electromagnetic potentials in the quantum domain. We shall show that, contrary to the conclusions of classical mechanics, there exist effects of potentials on charged particles, even in the region where all the fields (and therefore the forces on the particles) vanish. We shall then discuss possible experiments to test these conclusions; and, finally, we shall suggest further possible developments in the interpretation of the potentials.

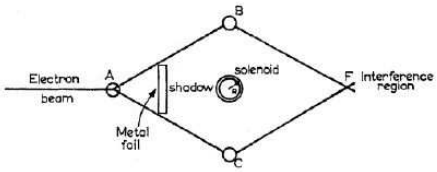


FIG. 2. Schematic experiment to demonstrate interference with time-independent vector potential.

Complément. Nous allons montrer que le changement de jauge définit en préambule conduit à changer les états propres de $\hat{H}$ selon la transformation:

$$\psi'(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t) exp\left(\frac{iq\Lambda(\vec{r},t)}{\hbar}\right)$$

1) Vérifier que quelle que soit la fonction $f(\vec{r},t)$,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - qV'\right) e^{iq\Lambda(\vec{r},t)/\hbar} f(\vec{r},t) = e^{iq\Lambda(\vec{r},t)/\hbar}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - qV\right) f(\vec{r},t)$$
$$\left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}'\right) e^{iq\Lambda(\vec{r},t)/\hbar} f(\vec{r},t) = e^{iq\Lambda(\vec{r},t)/\hbar}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right) f(\vec{r},t)$$

2) En déduire que si ψ est solution de l'équation de Schrödinger avec $\vec{A}$ et V, alors ψ' est solution avec $\vec{A}'$ et V'.

3) Montrer que la valeur moyenne de l'opérateur $(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})$ est bien invariant sous cette transformation.