Ferromagnétisme et approximation du champ moyen. Un matériau ferromagnétique possède en dessous d'une température critique T_c une aimantation spontanée même en l'absence d'un champ magnétique externe B^0. Le modèle le plus simple qui permet d'étudier ce phénomène est le modèle d'Ising : on regarde des moments magnétiques discernables situés sur les sites d'un réseau. L'hamiltonien s'écrit $H = -\sum_{\langle i,\,j\rangle} J\sigma_i\sigma_j - \mu_B B^0 \sum_i \sigma_i$, où $\sigma_i = \pm 1$. La première somme porte sur les paires de spins premiers voisins (on notera z le nombre de premiers voisins) et $J > 0$ représente l'interaction ferromagnétique. Le nombre total de sites du réseau est N.

Malgré nos simplifications le calcul exact des fonctions thermodynamiques est impossible en dimension $d > 2$. On utilise alors *l'approximation du champ moyen*.

1. En posant $\sigma_i = (\sigma_i - m) + m$, avec $m =< \sigma_i >$, écrire l'Hamiltonien au plus bas ordre des fluctuations $(\sigma_i - m)$. Montrer que chaque spin est soumis à un champ effectif B^{eff} qui ne dépend que de la moyenne $m\mu_B$ de l'aimantation par site et du nombre de voisins z.
2. Écrire une équation autoconsistante pour m. Discuter de l'existence de solutions non nulles à champ extérieur B^0 nul. On gardera B^0 nul dans ce qui suit.
3. Calculer l'énergie interne $U =< E >$ et l'entropie S pour une aimantation m donnée. Retrouver les solutions à aimantation non nulle et leur stabilité à partir de l'étude de l'énergie libre.

Equation d'état de Van der Waals et champ moyen. Soit un gaz de N particules dans un volume Ω à la température T. Les particules interagissent via un potentiel $V(r)$ où r est la distance entre particules. On suppose que V est infini pour $r < r_0$ (potentiel dit de "sphères dures", voir figure).

1) Quel est le nombre moyen de particules situées en distance entre r et (r+dr) d'une particule donnée ? En déduire le potentiel moyen ϕ subit par une particule.

2) En raison de la partie infiniment répulsive du potentiel, quel est le "volume " exclu par particule. En déduire que la fonction de partition à une particule peut s'écrire:

$$z = (\Omega - Nb)e^{-\beta\phi/2}/\lambda_T^3, \quad \text{avec} \quad \phi = \int_{r_0}^{\infty} nV(r)4\pi r^2 dr, \quad \text{et} \quad b = 2\pi r_0^3/3.$$

où $n = N/\Omega$ est la densité moyenne de particules et λ_T la longueur thermique vue en cours pour le gaz parfait.

3) En déduire l'équation d'état correspondante. On posera: $a = -\phi/2n$.