Les spins d'Ising: Au delà du champ moyen.

A. Solution exacte à une dimension. Reprenons nos N spins en interaction: $H = -J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j$ ($\sigma_i = \pm 1$).

1. On effectue le changement de variables $(\sigma_1, \sigma_2 \cdots, \sigma_N) \rightarrow (\sigma_1, \eta_1, \cdots, \eta_{N-1})$ avec $\eta_i = \sigma_i\sigma_{i+1}$. Les variables (η_i) sont appelées "variables de paroi". Calculer la fonction de partition canonique $Z(J, N)$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction de corrélation spatiale: $< \sigma_i\sigma_{i+n} >$ (indication: exprimer $\sigma_i\sigma_{i+n}$ en fonction des η_i). En déduire qu'il ne peut y avoir de transition de phase ferromagnétique à une dimension.

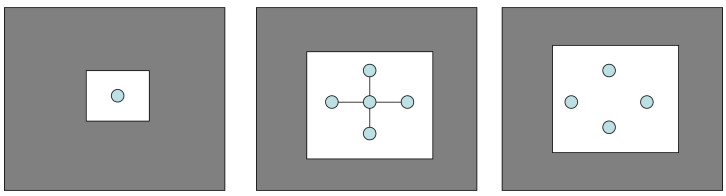
B. Le groupe de renormalisation. Cette approche a été introduite en 1971 par Kenneth Wilson qui reçut le prix Nobel de physique en 1982 à ce titre. L'idée ici est de montrer que notre système de N spins en interaction (J) peut être projeté de façon exacte sur un système de (N/2) spins en interaction (J'<J). Reprenons le cas de la chaîne 1D.

1. Dans la fonction de partition Z(J,N), développer explicitement la somme sur toutes les indices pairs de façon à écrire Z comme une somme sur les indices impairs seulement.
2. En déduire qu'on peut écrire: $Z(J, N) = [f(J')]^{N/2}Z(J', N/2)$ avec: $f(J')\exp^{\beta J'\sigma_i\sigma_j} = 2\cosh[\beta J(\sigma_i + \sigma_j)]$. Exprimer J' et $f(J')$ en fonction de β et J. Montrer que (J'<J).
3. A partir de l'expression de Z dans la limite $J' \rightarrow 0$, montrer qu'on peut calculer de façon (presque) exacte l'énergie libre par spin pour une suite de valeurs de (J) croissantes. Nous donnons ci-dessous les solutions obtenues pour le problème à une dimension.

	Energie libre par spin (en unité de -k_BT)	
βJ	RG	exacte
0.01	ln2 = 0.693147	0.693197
0.100334	0.698147	0.698172
0.327447	0.745814	0.745827
0.636247	0.883204	0.883210
0.972710	1.106299	1.106302
...	...	...

C. Approche Bether-Peierls (BP). Dans l'approche de champ moyen, les interactions entre spins sont remplacées par un champ moyen autocohérent h tel que l'énergie d'un spin dans le réseau est $-h\sigma_i$ et sa distribution de probabilité: $P_{CM} \cong exp(\beta h\sigma_i)$, où $\cong$ signifie "à la constante de normalisation près".

Dans l'approche de BP, on suppose qu'un spin σ_0 voit explicitement ses premiers voisins $(\sigma_{i=1,p})$, les autres spins (i=p+1,N) étant traités en champ moyen (voir figure).



Champ moyen (CM) Bethe-Peierls (BP) De retour au CM

1) Comment s'écrit la probabilité P d'une configuration $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ en fonction de la probabilité P_0 d'une configuration $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ en l'absence du spin (0) ?

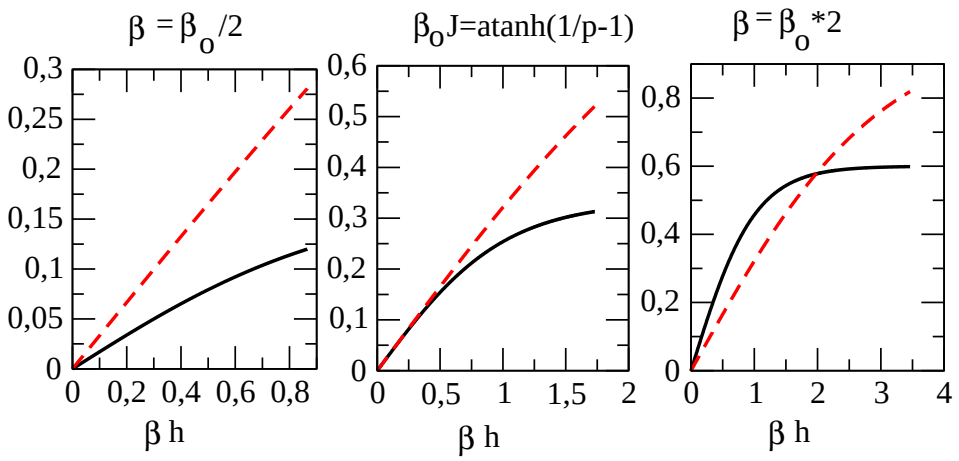
2) Dans l'approche BP, lorsqu'on enlève le spin (0), les voisins ($\sigma_{i=1,p}$) ne sont plus connectés si bien que tous les N-spins restants doivent être traités en champ moyen. En déduire que la probabilité de trouver le spin (0) dans l'état de spin σ_0 s'écrit:

$$P(\sigma_0) = \sum_{i=1,N} \sum_{\sigma_i=\pm 1} P(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N) \cong [2\cosh(\beta(h + J\sigma_0))]^p$$

3) Si maintenant on supprime le spin (1), alors par invariance par translation, le spin (0) doit aussi être traité en champ moyen et $P_1(\sigma_0) \cong \exp(\beta h \sigma_0)$. En identifiant à l'expression obtenue pour $P(\sigma_0)$ dans la question précédente, et en supprimant le spin (1) dans cette expression, montrer que l'on obtient l'équation autocohérente suivante:

$$\tanh[\beta h/(p-1)] = \tanh(\beta J)\tanh(\beta h)$$

On montrera pour cela qu'il existe $u(\beta, J, h)$ tel que: $\cosh[\beta(h + J\sigma_0)] \cong \exp[\beta u(\beta, J, h)\sigma_0]$, en utilisant les relations: $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$, et: $\exp(a\sigma) = \cosh(a)[1 + \sigma \cdot \tanh(a)]$.

4) Cette équation permet de trouver la température critique de transition (voir tableau pour réseaux à 2d voisons, d la dimension) qui est plus correcte que la solution champ moyen: $J\beta^C_{MF} = 1/p$. Que se passe-t-il à une dimension ?

d	$\beta_{MF}J$	$\beta_{BP}J$	$\beta_c J$
2	0,250	0,347	$1/2\ \log(1+\sqrt{2}) \simeq 0{,}441$
3	0,167	0,203	0,222
4	0,125	0,144	0,150