Premiers pas en statistique quantique: fermions.

A - Facteur d'occupation et densité d'états à une particule. Une des grandeurs centrale dans l'étude des gaz quantiques est le facteur d'occupation $f(\epsilon_k)$ qui donne la population moyenne (aussi notée $< n_k >$) d'un niveau d'énergie *à une particule* ϵ_k.

1. (Rappel de cours.) Ecrire la fonction de partition grand-canonique puis le facteur d'occupation $f(\epsilon_k) =< n_k >$ pour des fermions pouvant occuper des états à une particule d'énergie (ϵ_k). Tracer qualitativement $f(\epsilon)$ à température nulle et à température finie.

2. Ecrire la définition du nombre moyen de particules $< N >$ et de l'énergie interne U sous la forme d'une somme sur les indices $\{k\}$. Pour un système macroscopique, la différence en énergie entre deux niveaux (ϵ_k) adjacents est négligeable devant l'énergie moyenne des particules. Reformuler les grandeurs $< N >$ et U sous forme d'une intégrale continue en introduisant la densité d'état $D(\epsilon)$.

3. Quelle est l'expression de la densité d'états à une particule $D(\epsilon)$ pour un gaz de fermions dans une boite de coté L ? On rappelera les niveaux d'énergie dans la boite et on fera le lien entre le nombre d'états d'impulsion entre p et p+dp et le nombre d'états d'énergie entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$.

4. En déduire la relation à T=0 K entre l'énergie interne U, le nombre moyen de particules $< N >$ et le niveau de Fermi ϵ_F. En quoi ce résultat diffère du cas classique ?

5. **Complément.** Calculer la densité d'états $D(\epsilon)$ pour un gaz d'électrons libres à deux dimensions et une dimension.

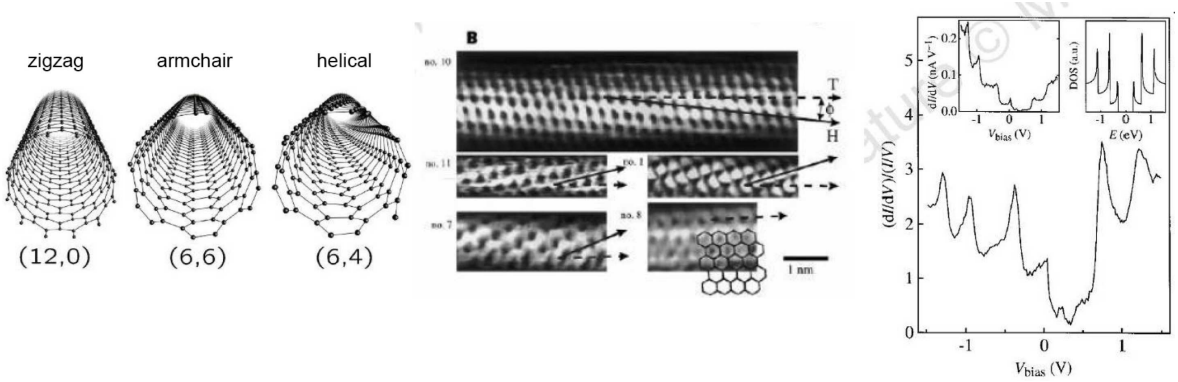

FIG. 1: Nanotubes de carbone. (Gauche) Images idéalisées. (Centre) Image experimentale (STM=scanning tunneling microscopy). (Droite) Densité d'état électronique experimentale (STS= scanning tunneling spectroscopy).

B - Naines blanches. Les naines blanches sont de vieilles étoiles parvenues au stade ultime de leur développement. Elles ont épuisé le combustible (hydrogène, hélium, etc.) qui alimente les réactions nucléaires des étoiles plus jeunes. Privées de combustible, elle s'effondrent sur elle-même sous l'effet de la gravitation: en effet, leur rayon R est de l'ordre de celui de la Terre, pour une masse M équivalente à celle du soleil. Sans les effets de "pression quantique" du gaz d'électrons dégénéré, rien ne viendrait stopper l'effondrement de la naine blanche en trou noir.

1. La température d'une naine blanche est de l'ordre de 10^7 K. Comparer l'énergie cinétique moyenne des atomes à l'énergie d'ionisation des électrons (de l'ordre de quelques eV).

2. A partir de l'expression du grand potentiel: $A = -k_B T ln(Z_G)$, montrer que: $A = -2U/3$. En déduire que la pression "électronique" $p_e = -(\partial A/\partial\Omega)|_{T,\mu}$ (Ω volume) s'écrit: $p_e = 2U/3\Omega$. Que se passe-t-il à basse température ? Comparer au cas classique.

3. La densité typique d'une naine blanche est de l'ordre de 10^{10} kg/m^3. Comparer la température de Fermi, définie par $\epsilon_F = k_B T_F$ (ϵ_F énergie de Fermi) à la température moyenne. En déduire que le gaz d'électrons se comporte comme un gaz "dégénéré" (distribution de Fermi proche de celle à température nulle).

   Note: Les résidus nucléaires constituant la naine présentent un nombre de masse moyen de 15 (carbone 12, oxygène 16, etc.) et un nombre d'électrons par atome égal à la moitié du nombre de masse.

4. L'énergie potentielle de gravitation d'un corps homogène de masse M et de rayon R est $E_G = -GM^2/R$. Etablir l'équation d'équilibre qui donne le rayon de la naine blanche.

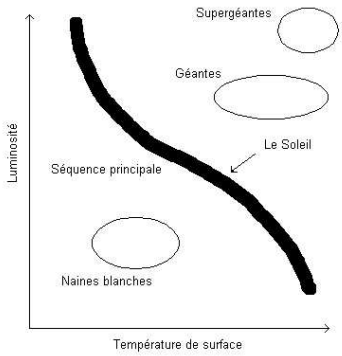

FIG. 2: Diagramme de Hertzsprung-Russell.